

Un método adaptativo para elementos finitos de un problema de Stokes dependiente del tiempo

Trabajo presentado como requisito para
optar el título de Maestría en Matemáticas

por

Lic. Stiven E. Díaz Noguera

Director

Dr. rer. nat. Ricardo A. Prato Torres

Universidad del Norte
Facultad de Ciencias Básicas
Departamento de Matemáticas y Estadísticas
Maestría en Matemáticas
2014

Facultad de Ciencias Básicas
Departamento de Matemáticas y Estadísticas
Composición del Jurado

Director: Dr. rer. nat. Ricardo A. Prato Torres
Jurado: Dr. rer. nat. Catalina Domínguez G.
Jurado: Dr. ing. mat. Ramiro M Acevedo M.

Mi madre y mi viejo me dieron la vida.
Mis hermanos y Ros el amor, el fútbol me dio el coraje
y las matemáticas la pasión.

Resumen

En esta tesis presentamos un estudio de sistemas de Stokes dependiente del tiempo con condiciones de contorno mixtas en un dominio bidimensional acotado y en un intervalo de tiempo $]0, T]$. Para este fin, iniciamos obteniendo la formulación variacional (débil) y realizamos una reseña sobre las condiciones en que se da la existencia, unicidad y estabilidad de la solución tanto para el problema estacionario como el no estacionario.

Para la aproximación se realiza una discretización completa espacio-tiempo mediante el uso del método de Galerkin discontinuo con polinomios lineales en el tiempo y elementos finitos conformes en el espacio, obteniendo un sistema matricial que presenta solución única.

Asimismo, se propone y se demuestra la confiabilidad de un estimador de error a posteriori de tipo residual para una formulación totalmente discreta obtenida al aplicar el método de Galerkin discontinuo para la discretización de la variable temporal y un método de elementos finitos conformes para la variable espacial. Se implementa numéricamente un método adaptativo usando indicadores locales de error provenientes del estimador de error propuesto. La estrategia adaptativa permite reducir el tiempo de computo, principalmente en problemas que presentan singularidades en el dominio, o en los valores iniciales o en la funciones de contorno. Se presentan diferentes experimentos numéricos, usando refinamientos uniformes y adaptativos los cuales confirman los resultados teóricos establecidos.

Palabras claves: Ecuación de Stokes dependiente del tiempo, estimador de error a posteriori, método adaptativo, método de Galerkin discontinuo, elementos finitos conformes.

Índice

Lista de figuras	3
Lista de tablas	5
1 Preliminares	13
1.1 Espacios funcionales para el problema de Stokes	13
1.1.1 Espacios de Sobolev	13
1.1.2 Espacios Funcional para el problema no estacional	15
1.2 Operadores divergencia y gradiente	17
1.2.1 Formas bilineales del problema de Stokes	18
1.3 Desigualdades y Teoremas de Green	19
2 Sistemas de Stokes	20
2.1 Problema modelo	20
2.2 Formulación variacional	21
2.3 Análisis del problema variacional	23
2.3.1 Teoría general	23
2.3.2 Análisis para Stokes estacionario	26
2.3.3 Análisis para Stokes no estacionario	27

3 Elementos finitos	29
3.1 Consideraciones generales	31
3.2 Elementos finitos conformes	34
3.2.1 Espacios discretos conformes	34
3.3 Espacios discreto dependiente del tiempo	37
4 Discretización en tiempo y espacio	39
4.1 Formulación totalmente discreto	39
4.2 Función constante a trozo en el tiempo	41
4.3 Función lineal a trozo en el tiempo	42
4.4 Sistema matricial discreto	44
5 Estimador de error a posteriori	48
5.1 Procedimiento Adaptativo	59
6 Resultados numérico	62
7 Conclusiones	78

Lista de Figuras

3.1	2-simplex	31
3.2	Mallado triangular \mathcal{T}_h de Ω	32
3.3	Vector unitario \mathbf{n}_E	33
3.4	Elemento de referencia \mathcal{T}_e	34
3.5	Funciones bases local ψ_i para funciones presión	36
3.6	Ejemplo de funcion bases local ϕ_i para componentes de las funciones velocidad	37
4.1	Elemento de referencia \mathcal{T}_e	45
5.1	Refinamiendo Rojo, Azul y Verde de un elemento \mathcal{T}	59
6.1	Mallado inicial uniforme del dominio $(0,1)^2$, utilizado en el Ejemplo 6.1.	62
6.2	Gráficas de la superficie para U^h (Izquierda), P^h (Derecha)	64
6.3	Campo direccion de U^h	68
6.4	Dominio Ω para el ejemplo 6.2	69
6.5	Mallas uniformes sobre el dominio con forma de L	70
6.6	Gráficas de la superficie para U^h (Izquierda), P^h (Derecha)	71
6.7	Mallas adaptativas sobre el dominio con forma de L	73

6.8	Gráficas de la superficie para U^h (Izquierda), P^h (Derecha)	74
6.9	Error vs dof usando un refinamiento uniforme (linea rojo) y refinamiento adaptativo (linea azul) para el Ejemplo 6.2	77

Lista de Tablas

6.1	Comportamiento del error cuando h tiende a cero en el intervalo $(0, 0.1]$	64
6.2	Error, valor del indicador residual e índice de efectividad en el intervalo $(0, 0.1]$ para el Ejemplo 6.1	65
6.3	Error, valor del indicador residual e índice de efectividad en el intervalo $(0.9, 0.10]$ para el Ejemplo 6.1	66
6.4	Error, valor del indicador residual e índice de efectividad en el intervalo $(2.9, 3]$ para el Ejemplo 6.1	67
6.5	Comportamiento del error cuando h tiende a cero en el intervalo $(0, 0.1]$	71
6.6	Error en cada una de las interacciones del método adaptativo para el Ejemplo 6.1	75
6.7	Rata de convergencia en cada una de las interacciones del método adaptativo para el Ejemplo 6.1	76

Introducción

En las últimas décadas, los estudios sobre la dinámica de fluidos, han generado gran importancia y relevancia debido a la variedad de aplicaciones en las diferentes ciencias, por ejemplo, la medicina, la combustión y el clima. Un modelo físico matemático muy adecuado para el flujo de fluidos es el sistema de ecuaciones de Navier-Stokes. Este conjunto de ecuaciones en derivadas parciales no lineales describen el movimiento de un fluido, por ejemplo, las corrientes oceánicas y el flujo alrededor de vehículos o proyectiles y en general cualquier fenómeno en el que se involucren fluidos Newtonianos [14]. Un caso limitado, pero no menos importante, de este tipo de ecuaciones son las llamadas ecuaciones o problema de Stokes. Estas determinan un modelo fundamental para fluidos que presentan velocidades bajas o viscosidades altas, o para fluidos de flujos que se confinan a espacios muy reducidos; ejemplos son las partículas de polvo que se establezcan en el aceite del motor y el flujo de la sangre en partes del cuerpo humano.

Las ecuaciones de Stokes en ciertos casos no disponen de una solución analítica; por lo que es preciso recurrir al análisis numérico para determinar una solución aproximada [8]. En este trabajo nuestro objetivo se centra en encontrar soluciones aproximadas de un problema de Stokes dependiente del tiempo, considerando los Elementos Finitos Conforme (EFC), propuestos por Taylor & Hood $\mathbb{P}_2 - \mathbb{P}_1$, para la discretización en el espacio y el método Discontinuo de Galerkin en el tiempo. Además, obtener estimadores de error A Posteriori (en tiempo y espacio) y utilizarlos en la ejecución de un método adaptativo que permita reducir el tiempo de computo en problemas que presentan singularidad causadas por esquinas re-entrantes.

El análisis de estimadores de error a posteriori del problema de Stokes dependiente del tiempo ha sido abordado entre otros por Bernardi [5] , Bernardi & Verfürth [7], Verfürth [25] y C. Carteson [11]. En estos trabajos los autores consideran un método regresivo de Euler para la discretización del tiempo. Como mencionamos, proponemos utilizar el Método de Galerkin Discontinuo de paso de tiempo, con el fin de obtener un esquema totalmente discreto en tiempo y espacio para el problema parabólico-elíptico que se plantea. En este método, la solución aproximada se busca como una función polinomial a trozos de grado 0 y 1 en la variable temporal t y no es necesariamente continuo en los nodos de la malla de tiempo, algo que resulta ventajoso en la medida que se trabajen modelos reales. Un análisis completo del método de Galerkin Discontinuo se puede encontrar, por ejemplo; Thomée [22].

En la implementación computacional, con la colaboración de Dr. rer. nat. Ricardo A. Prato Torres, proponemos un programa escrito en el lenguaje de Matlab que permite analizar y comprobar la teoría desarrollada. Para ello, se tomaron como referencia los trabajos realizados por C. Carstensen en [2] [3] [11] y principalmente R. Prato en [18].

El trabajo esta organizado de la siguiente forma:

En el **capítulo 1** se enuncian las definiciones básicas, y desigualdades del análisis funcional y conceptos de elementos finitos necesarios. Se establece a lo largo del trabajo que las funciones o espacios con valores vectoriales se escriben en negrita a diferencia de las funciones escalares.

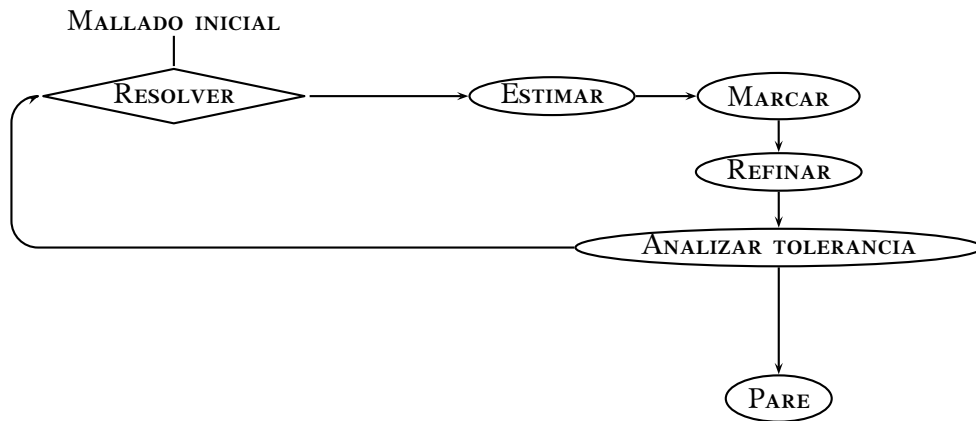
Capítulo 2 desarrolla la formulación variacional mixta, utilizando la teoría presentada, principalmente, por [17] y [21]. Considerando $H_0^1(\Omega)$ y $L_0^2(\Omega)$ los espacios de prueba para el campo velocidad y presión, respectivamente. Además, realizamos un estudio sobre las condiciones que garantiza la existencia y unicidad de la solución del problema débil.

En el **capítulo 3** establecemos los espacios finito-dimensional usados en la formulación discreta o semi-discreta. Se determina la base que los generan, y a partir de estos se construye, por combinación lineal, una sucesión de funciones que se aproximen a la solución. Todo esto basándonos en la teoría desarrollada por Girault & Raviart en [15] y Crouzeix & Raviart en [11]. En la Sección 3.2 planteamos una formulación discreta conforme, utilizando los espacios polinomiales lineales y

cuadráticos para la presión y velocidad, respectivamente.

El **capítulo 4** realizamos una discretización completa, empleando el método Galerkin Discontinuo (MGD) con funciones de prueba constante y lineal a trozos y los métodos de elementos finitos conformes (EFC) y no conformes (EFNC). El espacio de la función de elementos finitos correspondiente a GD consta de polinomios que están autorizados para ser discontinua a través de los nodos temporales. Por los tanto, tomaremos funciones polinomial a trozos de grado 0 y 1 en la variable temporal y consideramos la partición, no necesariamente uniforme, del tiempo $]0, T]$ como $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$ en sub-intervalos $I_n =]t_{n-1}, t_n]$ de longitud $k_n := t_n - t_{n-1}$. En consecuencia, se genera el sistema matricial discreto dependiente del tiempo y que aproximan de forma optima a nuestras variables solución.

Capítulo 5 propone un estimador de error a posteriori de tipo residual para la solución del método de Galerkin discontinuo completamente discreto (véase Teorema 5.1), utilizando el estimador de error residual. Se utilizan indicadores locales de error basados en el estimador residual propuesto a fin de proponer una estrategia de refinamiento adaptativa. La estrategia sigue el siguiente esquema:



El **capítulo 6** realizamos experimentos numéricos en los cuales se consideran problemas con soluciones exactas conocidas, permitiendo el estudio sobre la consistencia de los estimadores y el algoritmo adaptativo.

Finalmente, se consigna conclusiones en el **capítulo 6**.

Agradecimientos

Realizar esta investigación no hubiese sido posible sin el apoyo, asesoría y patrocinio de algunos familiares, amigos, docentes y entidades las cuales quiero agradecer sin olvidarme de esa fuerza omnipresente que me ha acompañado y escuchado en los momentos de dificultad; Dios.

En primer lugar, a mis padres, Soledad y Enrique, quienes comprendieron lo importante que significaba este proyecto apoyándolo moral y afectivamente. Además agradecer la comprensión y el ánimo recibidos de mis hermanos. Mi infinito amor hacia ustedes.

A mi querida novia, Rosmery, quien por su infinita paciencia pude contar con ella no hasta dos o hasta diez sino contar con ella.

Mi director de tesis, Dr. rer. nat. Ricardo A. Prato Torres, quien fue pieza fundamental para generar este resultado. Su apoyo, sabiduría, conocimiento y humildad no solo aportaron a la investigación sino que me hicieron crecer tanto en lo profesional como en lo personal. Gracias totales.

Por último, agradecer el patrocinio brindado por el programa de COLCIENCIAS, Joven investigador y el acompañamiento del departamento de matemáticas y estadística de la Universidad del Norte.

Stiven Díaz Noguera.

Capítulo 1

Preliminares

A continuación, introducimos las definiciones y características de los espacios adecuados para el análisis del problema. Además establecemos las notaciones de aspectos utilizados, por ejemplo, el producto punto, las diferentes normas, el operador gradiente y divergencia y las formas bilineales. Ver en R. A. Adams [1], S. C. Brenner [9], Girault & Raviart [17], L. C. Evans [16] y R. Verfurth [25].

1.1 Espacios funcionales para el problema de Stokes

Uno de nuestros objetivos es recurrir al análisis numérico por medio de MGD y MEF para determinar una solución aproximada para la ecuación de Stoke dependiente del tiempo. El proceso de discretización espacial se basa en la representación discreta de una formulación variacional de la ecuación parcial. En este sentido, la elección de los espacio funcionales reviste mayor importancia. En esta sección presentamos conceptos y definiciones relacionadas con los espacios de Sóbolev, debido a que presentan propiedades adecuadas para nuestro fin. Para profundizar en el tema, sugerimos al lector la obra de R. A. Adams [1], S. C. Brenner [9] y L. C. Evans [16]

1.1.1 Espacios de Sobolev

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Para funciones $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, denotamos por C_c^k , con $0 < k < \infty$, el espacio de funciones k -continuamente diferenciable, con soporte compacto en Ω .

Si $k = \infty$, denota el espacios de funciones infinitamente continua diferenciables.

$$\mathcal{C}^\infty := \bigcap_{k>0} \mathcal{C}^k$$

Definición 1.1. Sea $1 \leq p < \infty$, se definen los espacios

$$L^p(\Omega) := \left\{ \phi \in \mathcal{C}_c^k, \int_{\Omega} |\phi|^p dx < \infty \right\}$$

dotado de la norma

$$\|\phi\|_{L^p(\Omega)} := \left(\int_{\Omega} |\phi(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Asimismo, el conjunto de funciones localmente integrable se define por

$$L^1_{\text{loc}}(\Omega) = \{f : f \in L^1(K), \text{ para todo compacto } K \subset \Omega\}$$

Definición 1.2. Sean $u, v \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, decimos que v es la derivada parcial débil de u , siempre que

$$\int_{\Omega} u(x) \partial^\alpha \phi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} v(x) \phi(x) dx \quad \forall \phi(x) \in \mathcal{C}_0^\infty$$

donde $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ es un multi-índice, es decir, una n -tupla de enteros no negativos con $|\alpha| := \sum_{i=1}^n \alpha_i$.

Definición 1.3. Para cada $h \geq 0$ y un $1 \leq p \leq \infty$, se definen los espacios de Sóbolev \mathcal{W}_p^k como

$$\mathcal{W}_p^k(\Omega) := \{ \phi \in L^p(\Omega) : \partial^\alpha \phi \in L^p(\Omega) \text{ para todo } |\alpha| < k \}$$

Definición 1.4. Para $p = 2$ en $\mathcal{W}_p^k(\Omega)$, definimos los espacios $H^k(\Omega)$

$$H^k(\Omega) := \{ \phi \in L^2(\Omega) : \partial^\alpha \phi \in L^2(\Omega) \text{ para todo } |\alpha| < k \}$$

$$H_0^1(\Omega) := \{ v \in H_0^1 \text{ tal que } v|_{\Gamma} = 0 \}$$

Los espacios $H^k(\Omega)$ son espacios Hilbert con producto interno de $L^2(\Omega)$ dado

$$\langle v, u \rangle_{\Omega} := \int_{\Omega} v \cdot u dx$$

Teorema 1.1. [9, Teorema 1.3.2] $\mathcal{W}_p^k(\Omega)$ es un espacio de Banach dotado con la norma y seminorma,

$$\|\phi\|_{\mathcal{W}_p^k(\Omega)} := \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} |\partial^\alpha \phi|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$|\phi|_{\mathcal{W}_p^k(\Omega)} := \left(\sum_{|\alpha|=k} \int_{\Omega} |\partial^\alpha \phi|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

con $1 \leq p < \infty$, y en el caso de $p = \infty$ la norma

$$\|\phi\|_{\mathcal{W}_\infty^k(\Omega)} := \max_{|\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha \phi\|_{L^\infty(\Omega)}$$

Observación 1.1.1. Para el resto del trabajo, establecemos la siguiente notación: Sea un dominio poligonal $\omega \subset \mathbb{R}^2$ con frontera Lipschitz γ , entonces

$$\|\phi\|_\omega := \|\phi\|_{L^2(\omega)} \quad \|\phi\|_{1\omega} := \|\phi\|_{H_0^1(\omega)}$$

$$|\phi|_{1\omega} := |\phi|_{H_0^1(\omega)} \quad \|\phi\|_\gamma := \|\phi\|_{L^2(\gamma)}$$

De igual forma, para el producto interno.

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle_\gamma := \int_\gamma \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} dx$$

Si $\omega = \Omega$, omitiremos el índice ω .

1.1.2 Espacios Funcional para el problema no estacional

Dado que nuestro problema es no estacionario, los espacios y sus normas, que introducimos en la Subsec. 1.1.1, se plantean bajo un intervalos de tiempo $[0, T] \cap \mathbb{R}$. Ver [17, Capítulo V] y [25]. Las funciones \mathbf{u} y p , son funciones dependiente de una variable de espacio Ω y una variable de tiempo en $[0, T]$. A menudo es conveniente separar las variables, por ejemplo, considerar, $\mathbf{u}(t)$, una función de tiempo que toma sus valores en el espacio,

$$\mathbf{u}:]0, T[\mapsto \Omega$$

$$t \mapsto \mathbf{u}(t, \cdot)$$

Definición 1.5. Dado un espacio de Banach V , equipado con la norma $\|\cdot\|_V$, y sea $T \in \mathbb{R}$, denotamos por $L^p([0, T]; V)$, con $1 \leq p < \infty$, el espacio de todas las funciones medibles, \mathbf{v} , definidas sobre $[0, T]$ con valor en V .

$L^p([0, T]; V)$ es un espacio de Banach, con la siguiente norma

$$\|\mathbf{v}\|_{L^p(0,T;V)} := \left(\int_0^T \|\mathbf{v}(\cdot, t)\|_V^p dt \right)^{\frac{1}{p}} < \infty. \quad \text{con } 1 \leq p < \infty.$$

Si $p = \infty$ en $L^p(0, T; V)$ se define la norma

$$\|\mathbf{v}\|_{L^\infty(0,T;V)} := \max_{t \in [0, T]} \|\mathbf{v}(\cdot, t)\|_V.$$

Dado un $\mathbf{v} \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$ y $\phi \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$, consideramos las siguientes normas

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))}^2 &:= \int_0^T \|\mathbf{v}\|^2 + \|\nabla \mathbf{v}\|^2 \\ \|\mathbf{v}\|_{L^2([0,T;H^1(\Omega))}^2 &:= \int_0^T \|\nabla \mathbf{v}\|^2 \\ \|\phi\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 &:= \int_0^T \|\phi\|^2 \end{aligned}$$

En la Subsec. 1.1.1, definimos la noción de derivada débil (o generalizada) sobre el dominio Ω , ahora los introducimos sobre el intervalo de tiempo. Denotamos por $\partial_t \mathbf{u} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}$

Lema 1.1.1. [21, Capítulo III, Lema 1.1] Sea X un espacio de Banach con X' su dual y sea \mathbf{u} y ϕ dos funciones que pertenecen a $L^1([0, T]; X)$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes

a) Para cada función test $\phi \in D([0, T])$

$$\int_0^T \mathbf{u}(t) \partial_t \phi(t) dt = - \int_0^T g(t) \phi(t) dt$$

b) Para cada $h \in X'$

$$\frac{d}{dt} \langle \mathbf{u}, h \rangle = \langle g(t), h \rangle$$

Además, en cada uno de estos casos, \mathbf{u} es casi en todas partes igual a una función de $\mathcal{C}^0([0, T]; X)$

Definición 1.6. sea $T > 0$ y V un espacio de Banach, $\mathcal{W}_2(0, T; V, V')$, denota el espacio de todas las funciones $\mathbf{u} \in L^2([0, T]; V)$ tal que $\partial_t \mathbf{u} \in L^2([0, T]; F)$,

$$\mathcal{W}(0, T; \mathbf{V}) := \{ \mathbf{v} \in L^2(0, T; V); \quad \partial_t \mathbf{v} \in L^2(0, T; V') \}$$

$\mathcal{W}(0, T; \mathbf{V})$, es un espacio de Hilbert equipado con la norma,

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathcal{W}(0, T; \mathbf{V})} := \left(\int_0^T \|\mathbf{u}(t)\|^2 + \|\partial_t \mathbf{u}(t)\|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

1.2 Operadores divergencia y gradiente

Para funciones $\mathbf{v} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \in \mathbb{R}^2$ y $p \in \mathbb{R}$, definimos los operadores divergencia y gradiente por

$$\operatorname{div} \mathbf{v} := \sum_{i=1}^2 \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial x_i} \quad \nabla p := \left(\frac{\partial p}{\partial x_1}, \frac{\partial p}{\partial x_2} \right) \quad \nabla \mathbf{v} := \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \mathbf{v}_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \mathbf{v}_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

Note que

$$\begin{aligned} \nabla : L^2(\Omega) &\mapsto H^{-1}(\Omega)^2 \\ \operatorname{div} : H^1(\Omega)^2 &\mapsto L^2(\Omega) \end{aligned}$$

Introducimos el siguientes subespacios de $H_0^1(\Omega)$:

$$\mathcal{V} = \{ \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^2, \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \} \quad (1.1)$$

dado que \mathcal{V} es cerrado, tenemos la descomposición

$$H_0^1(\Omega) = \mathcal{V} \oplus \mathcal{V}^\perp \quad (1.2)$$

donde \mathcal{V}^\perp denota el complemento ortogonal de \mathcal{V} en $H_0^1(\Omega)$ para el producto escalar $\langle \nabla \mathbf{v}, \nabla \mathbf{u} \rangle$

Lema 1.2.1. [17, Lema 2.1] Si $f \in H^{-1}(\Omega)^2$ satisface

$$\langle f, \mathbf{v} \rangle = 0, \quad \text{para todo } \mathbf{v} \in H_0^1 \quad (1.3)$$

entonces existe un $p \in L^2(\Omega)$ tal que $f = \nabla p$.

Corolario 1.2.1. [17, Corolario 2.4] Sea Ω Acotada

- a) El operador ∇ es un isomorfismo de $L^2(\Omega)$ sobre \mathcal{V}
- b) El operador $-\operatorname{div}$ es un isomorfismo de \mathcal{V}^\perp sobre $L^2(\Omega)$

1.2.1 Formas bilineales del problema de Stokes

Sea $E(\cdot, \cdot)$ una forma bilineal, en un espacio lineal normado \mathbf{H} .

Se dice que $E(\cdot, \cdot)$ continua, si existe un $C < \infty$ tal que

$$|E(v, w)| \leq C \|v\|_{\mathbf{H}} \|w\|_{\mathbf{H}} \quad \text{para todo } v, w \in \mathbf{H}$$

y coersiva (V-elíptica) sobre $V \subset \mathbf{H}$ si existe un $\alpha < \infty$

$$|E(v, v)| \geq \alpha \|v\|_V^2 \quad \text{para todo } v \in V.$$

Definición 1.7. Dado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Sean $a(\cdot, \cdot)$ y $b(\cdot, \cdot)$ formas bilineales, tal que

$$\begin{aligned} a &: H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \mapsto \mathbb{R} \\ b &: L_0^2(\Omega) \times L_0^2(\Omega) \mapsto \mathbb{R} \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} a(\mathbf{v}, \mathbf{u}) &:= \int_{\Omega} \nabla \mathbf{v} : \nabla \mathbf{u} \\ b(p, \mathbf{v}) &:= - \int_{\Omega} p \cdot \operatorname{div} \mathbf{v} \end{aligned}$$

Definición 1.8. Sean V y Q espacios de Hilbert y sea $b : V \times Q \rightarrow \mathbb{R}$. Decimos que b satisface la condición inf – sup, si existe $\beta > 0$ tal que

$$\sup_{v \in V} \frac{b(v, q)}{\|v\|_V} \geq \beta \|q\|_Q \quad \text{para todo } q \in Q$$

1.3 Desigualdades y Teoremas de Green

Lema 1.3.1. Sean $a, b \in \mathbb{R}$, entonces

$$ab \leq \frac{\varepsilon}{2}a^2 + \frac{1}{2\varepsilon}b^2 \quad (1.4)$$

Teorema 1.2. [16, Pag. 622] **Desigualdad de Holder.** Asumimos que $1 \leq p, q \leq \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, si $\mathbf{u} \in L^p(\Omega)$, $\mathbf{v} \in L^q(\Omega)$ se tiene que

$$\int_{\Omega} |\mathbf{u}\mathbf{v}| dx \leq \|\mathbf{u}\|_{L^q(\Omega)} \|\mathbf{v}\|_{L^p(\Omega)} \quad (1.5)$$

Teorema 1.3. [16, Pag. 623] **Desigualdad de Holder discreta** Para $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$, $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in \mathbb{R}$, $1 \leq p, q \leq \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, entonces

$$\left| \sum_{i=1}^n v_i u_i \right| \leq \left(\sum_{i=1}^n |v_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n |u_i|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

Tomando $p, q = 2$, la desigualdad es llamada desigualdad de Cauchy discreta

Teorema 1.4. Gauss-Green Sea $\mathbf{u} \in H_0^1(\Omega)$, entonces

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u} dx = \int_{\partial\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_i ds \quad (1.6)$$

con $i = 1, \dots, n$

Proposición 1.3.1. [9, Proposición 5.1.5] Sean $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)$, entonces

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} \mathbf{v} = - \int_{\Omega} \mathbf{u} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_i} dx + \int_{\Gamma} \mathbf{u} \mathbf{v} \mathbf{n}_i ds \quad (1.7)$$

con $i = 1, \dots, n$

Proposición 1.3.2. [9, Proposición 5.1.6] **Fórmula de Green** Sean $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)$, entonces

$$- \int_{\Omega} \Delta \mathbf{u} \mathbf{v} dx = \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} \nabla \mathbf{v} - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} \mathbf{v} ds. \quad (1.8)$$

Capítulo 2

Sistemas de Stokes

En este capítulo, planteamos el problema de Stokes no estacionario, en términos de su formulación variacional (débil), para todo $t \in]0, T[$, con condiciones de frontera Dirichlet homogéneas y Neumann. Dando lugar a un problema de formulación mixta. Además realizamos un estudio sobre las condiciones en que se da la existencia, unicidad y estabilidad de la solución (\mathbf{u}, p) , asimismo se establece los espacios adecuados para tal propósito, es decir, se debe satisfacer una relación entre los espacios del campo velocidad y la presión. Esa relación se conoce como condición inf-sup o de LBB. Ver los trabajos de R. Temam [21], H. C. Elman & D. Silvester [14] y Girault & Raviart [17].

2.1 Problema modelo

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, un dominio acotado con frontera $\Gamma := \partial\Omega$ Lipschitz continua y $[0, T] \cap \mathbb{R}$, como dominio temporal. Consideramos el siguiente problema de Stokes

Dado \mathbf{f} , \mathbf{g} y \mathbf{u}_0 . Hallar \mathbf{u} y p tal que

$$\partial_t \mathbf{u} - \nu \Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} \quad \text{en } \Omega \times]0, T[\quad (2.1a)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad \text{en } \Omega \times]0, T[\quad (2.1b)$$

$$\mathbf{u}(\cdot, t) = \mathbf{h} \quad \text{en } \Gamma_1 \times]0, T[\quad (2.1c)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} - n p = \mathbf{g} \quad \text{en } \Gamma_2 \times]0, T[\quad (2.1d)$$

$$\mathbf{u}(\cdot, 0) = \mathbf{u}_0 \quad \text{en } \Omega \quad (2.1e)$$

La primera ecuación representa la conservación del impulso del fluido (ecuación de momento), y la segunda plantea la conservación de la masa (condición de incomprensibilidad), considerando el caso de un flujo para el cual la densidad no cambia con el tiempo o el espacio [14]. La variable $\mathbf{u} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ es una función vectorial dependiente de tiempo que modela la velocidad del fluido, \mathbf{u}_0 representa la velocidad inicial, y la variable p una función escalar que modela la presión. Sin pérdida de generalidad, asumiremos la viscosidad constante $\nu = 1$. Las condiciones de frontera impuestas son las condiciones de Dirichet en Γ_1 y Neumann en Γ_2 respectivamente, donde $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \Gamma$. Denotamos por $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}}$ la derivada direccional de \mathbf{u} con respecto a la norma \mathbf{n} .

2.2 Formulación variacional

La formulación variacional del problema de Stokes requiere establecer dos tipos de espacios, el espacio de funciones de prueba y el espacio de las funciones solución para el campo de la velocidad y el campo de presión. Estos deben satisfacer las condiciones de fronteras y ser adecuados para la formulación. Sea $H_0^1(\Omega)$ y $L_0^2(\Omega)$ los espacios de prueba para el campo velocidad y presión, respectivamente.

Multiplicando las dos primeras ecuaciones por funciones de prueba (test) \mathbf{v} y q respectivamente e integrando sobre el dominio espacial, resulta

$$\int_{\Omega} \partial_t \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, dx - \int_{\Omega} \Delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, dx + \int_{\Omega} \nabla p \cdot \mathbf{v} \, dx = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, dx \quad (2.2a)$$

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u} \cdot q \, dx = 0 \quad (2.2b)$$

donde $\mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)$ y $q \in L_0^2(\Omega)$, para todo $t \in]0, T[$. Aplicando (1.6) (1.8) y (1.7) sobre Ω , contemplando las condiciones mixta (condiciones de frontera), tenemos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla p \cdot \mathbf{v} \, dx &= - \int_{\Omega} p \cdot \operatorname{div} \mathbf{v} \, dx + \int_{\Omega} \operatorname{div} p \cdot \mathbf{v} \, dx \\ &= - \int_{\Omega} p \operatorname{div} \mathbf{v} \, dx + \int_{\partial \Omega} p \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \, ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\int_{\Omega} \Delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, dx &= \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} \, dx - \int_{\Omega} \operatorname{div} (\nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \, dx \\
&= \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} \, dx - \int_{\partial \Omega} (\mathbf{n} \cdot \nabla \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} \, ds \\
&= \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} \, dx - \int_{\partial \Omega} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} \cdot \mathbf{v} \, ds.
\end{aligned}$$

Denotamos por $\nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v}$ el producto escalar componente a componente, es decir, $\nabla u_1 \nabla v_1 + \nabla u_2 \nabla v_2$ con $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ y $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$. Entonces (2.2) resulta,

$$\begin{aligned}
\langle \partial_t \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} \, dx - \langle p, \operatorname{div} \mathbf{v} \rangle &= F(\mathbf{v}) \\
\langle q, \operatorname{div} \mathbf{u} \rangle &= 0
\end{aligned}$$

$$\text{con } F(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, dx + \int_{\Gamma_2} \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} \, ds$$

La función \mathbf{u} debe ser cuadrado integrable, dependiente del tiempo y satisfacer las condiciones de fronteras. El espacio que se ajusta a estas condiciones es $\mathcal{W}(0, T; H_0^1(\Omega))$. Asimismo se define el espacio solución adecuado, para el campo presión por $L^2(0, T; L^2(\Omega))$. El hecho de que $\partial_t \mathbf{u} \in L^2(0, T; H_0^{-1}(\Omega))$ es demostrado en la Subsec. 2.3.3. En consecuencia el problema variacional queda establecido como:

Formulación Variacional

Hallar $\mathbf{u} \in \mathcal{W}(0, T; H_0^1(\Omega))$ y $p \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ tal que

$$\langle \partial_t \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} \, dx - \langle p, \operatorname{div} \mathbf{v} \rangle = F(\mathbf{v}) \quad \text{sobre } \Omega \times]0, T[\quad (2.3a)$$

$$\langle q, \operatorname{div} \mathbf{u} \rangle = 0 \quad \text{sobre } \Omega \times]0, T[\quad (2.3b)$$

$$\mathbf{u}(\cdot, t) = 0 \quad \text{en } \Gamma_1 \times]0, T[\quad (2.3c)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} - n p = \mathbf{g} \quad \text{en } \Gamma_2 \times]0, T[\quad (2.3d)$$

$$\mathbf{u}(\cdot, 0) = \mathbf{u}_0 \quad \text{sobre } \Omega \quad (2.3e)$$

Para todo $\mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)$ y $q \in L_0^2(\Omega)$

Para garantizar la condición inicial se toma \mathbf{u} continua sobre $[0, T]$. Considerando la definición 1.7, entonces la formulación variacional se puede establecer como

$$\langle \partial_t \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{p}, \mathbf{v}) = F(\mathbf{v}) \quad (2.4a)$$

$$-b(\mathbf{p}, \mathbf{v}) = 0 \quad (2.4b)$$

2.3 Análisis del problema variacional

En esta sección garantizamos la existencia y unicidad de la solución del problema variacional (2.3). Para tal propósito seguiremos el esquema propuesto en [8, Cap I, §5] y [17, Cap. I, §4-5]. Constituyendo un marco abstracto adaptado a las especificidades de un problema mixto. Posteriormente se analiza el caso estacionario, es decir, $\partial_t \mathbf{u} = 0$, y por último el no estacionario.

2.3.1 Teoría general

Como indicamos, el problema de Stokes plantea una formulación mixta en donde intervienen dos variables independiente. Por lo tanto hemos convenido desarrollar, inicialmente, la siguiente teoría. En esta Subsección, las notaciones indicadas no tienen relación con el resto de la tesis.

Consideremos el problema: Dado V y Q espacios de Hilbert. Encontrar $\mathbf{u} \in V$ y $p \in Q$ tal que

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) &= F(\mathbf{v}) \quad \mathbf{v} \in V \\ b(\mathbf{u}, q) &= G(q) \quad q \in Q \end{aligned} \quad (2.5)$$

Donde $a(\cdot, \cdot)$ y $b(\cdot, \cdot)$ son formas bilineales continuas.

Definición 2.1. Sean $A : V \rightarrow V^{-1}$, $B : V \rightarrow Q^{-1}$ y su adjunto $B^* : Q \rightarrow V^{-1}$ operadores lineales continuos, tal que:

$$\langle A\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = a(\mathbf{u}, \mathbf{v})$$

$$\langle B\mathbf{v}, q \rangle = b(\mathbf{v}, q)$$

$$\langle \mathbf{v}, B^*q \rangle = b(\mathbf{v}, q)$$

Mediante los operadores descritos en la definicion anterior, el Problema (2.5) se establece de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} A\mathbf{u} + B^*q &= F(\mathbf{v}) & F &\in V^{-1} \\ B\mathbf{u} &= G(q) & G &\in Q^{-1} \end{aligned} \quad (2.6)$$

Análogo a la definición (1.1), introducimos los siguientes conjuntos

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &:= \{ \mathbf{v} \in V, \quad \text{tal que } B\mathbf{v} = 0 \} \\ \mathcal{V}_g &:= \{ \mathbf{v} \in V, \quad \text{tal que } B\mathbf{u} = g \}. \end{aligned}$$

Se observa que sí (\mathbf{u}, p) es solución de (2.6) entonces $\mathbf{u} \in \mathcal{V}_g$ y

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \langle f, \mathbf{v} \rangle \quad \text{para todo } \mathbf{v} \in \mathcal{V} \quad (2.7)$$

Observación 2.3.1. *Se determina, con base al Lema siguiente, que este condicionamiento es recíproco. Es decir, (2.6) y (2.7) son equivalentes. .*

Lema 2.3.1. *[8, Lema 5.1] Las siguientes afirmaciones son equivalentes*

(a) *Existe $\beta > 0$ tal que*

$$\sup_{\mathbf{v} \in V} \frac{b(\mathbf{v}, q)}{\|\mathbf{v}\|_V} \geq \beta \|q\|_Q \quad \text{para todo } q \in Q$$

(b) *El operador B^* es un isomorfismo de Q sobre \mathcal{V}^\perp y*

$$\|B^*q\|_{V^{-1}} \geq \beta \|q\|_Q \quad \text{para todo } q \in Q$$

(c) *El operador B es un isomorfismo de \mathcal{V}^\perp sobre Q^{-1} y*

$$\|B^*\mathbf{v}\|_{Q^{-1}} \geq \beta \|\mathbf{v}\|_V \quad \text{para todo } \mathbf{v} \in \mathcal{V}^\perp$$

Corolario 2.3.1. *Si la forma bilineal $b(\cdot, \cdot)$ satisface la condición inf – sup entonces (2.6) y el (2.7) son equivalentes. Es decir, existe una solución única de (2.6) si solo si existe solución única de (2.7).*

Prueba. Como se mencionó, si (\mathbf{u}, p) es solución de (2.6) entonces \mathbf{u} satisface a (2.7). Por el contrario, Como $\mathbf{u} \in \mathcal{V}_g$ entonces $B\mathbf{u} = g$. Solo falta demostrar que existe un

$p \in Q$ tal que $B^*p = f - Au$. Pero b satisface la condición $\inf - \sup$ y por el lema anterior, la existencia de p se garantiza si $f - Au \in \mathcal{V}^\perp$. Notemos que

$$\begin{aligned}\langle f - Au, v \rangle &= \langle f, v \rangle - \langle Au, v \rangle \quad \text{para todo } v \in \mathcal{V}. \\ &= f(v) - a(u, v) \\ &= 0\end{aligned}$$

■

El Lema siguiente, proporcionan condiciones para la forma bilineal $a(\cdot, \cdot)$, que junto con la condición $\inf - \sup$ para $b(\cdot, \cdot)$ proporcionan el teorema central.

Lema 2.3.2. *si existe $\alpha > 0$ tal que la forma $a(\cdot, \cdot)$ cumple*

$$\begin{aligned}(a) \quad \sup_{u \in W} \frac{a(u, v)}{\|v\|_V} &\geq \alpha \|v\|_V \quad \text{para todo } v \in \mathcal{V} \\ (b) \quad \sup_{v \in \mathcal{V}} \frac{a(u, v)}{\|v\|_V} &\geq \alpha \|u\|_V \quad \text{para todo } u \in \mathcal{V}\end{aligned}$$

Entonces para todo $f \in \mathcal{V}^{-1}$ existe un único $u \in \mathcal{V}$ tal que $a(u, v) = f(v)$ para todo $v \in \mathcal{V}$ además $\|u\|_V \leq \frac{1}{\alpha} \|G\|_{\mathcal{V}^{-1}}$.

Teorema 2.1. [17, Cap. I, Teorema 4.1] *Si la forma bilineal $a(\cdot, \cdot)$ satisface el Lema 2.3.2 y $b(\cdot, \cdot)$ la condición $\inf - \sup$ entonces existe un único $(u, p) \in V \times Q$ tal que es solución de (2.6).*

Prueba. según el Corolario 2.3.1, se puede realiza la demostración del teorema para (2.7). Sea $g \in Q^{-1}$. Como $b(\cdot, \cdot)$ cumple la condición $\inf - \sup$, el operador B es un isomorfismo de \mathcal{V}^\perp sobre Q^{-1} . Luego existe único $\hat{u} \in \mathcal{V}^\perp$ tal que

$$B\hat{u} = g$$

Ahora, supongamos que existe un $w \in \mathcal{V}$, tal que $w = u - \hat{u}$, donde u es la solución de (2.7). Entonces

$$\begin{aligned}a(w, v) &= a(u, v) - a(\hat{u}, v) \\ &= f(v) - a(\hat{u}, v) \\ &= \langle f - Au, v \rangle\end{aligned} \tag{2.8}$$

Por el Lema 2.3.2, como $\alpha(\cdot, \cdot)$ satisface $\inf - \sup$ por hipótesis, tenemos que existe $w \in \mathcal{V}$ y es único tal que se cumple 2.8. Luego, existe $\mathbf{u} = w + \hat{\mathbf{u}}$ que satisface el problema (2.7) y es única debido a la unicidad de w ■

De esta forma se garantiza la existencia y unicidad para un problema mixto. Ahora partiendo de este hecho, presentamos la relación con un problema no estacionario como preámbulo para nuestro sistema (2.3). Se destaca que la teoría para el caso abstracto no plantea la incomprensibilidad, la cual determina algunas características extras que no son excluyente.

2.3.2 Análisis para Stokes estacionario

En esta subsección determinamos la existencia y unicidad de (2.3), con $\partial_t \mathbf{u} = 0$ (problema de Stokes estacionario). Consideramos el problema de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \alpha(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) &= F(\mathbf{v}) \\ b(\mathbf{u}, q) &= 0 \end{aligned} \tag{2.9}$$

donde las formas bilineales son definidas como en (2.4). Ahora, siguiendo el Teorema 2.1 se debe comprobar que $\alpha(\cdot, \cdot)$ y $b(\cdot, \cdot)$ cumplen las condiciones de $\inf - \sup$, respectivamente.

Para la forma bilineal $\alpha(\cdot, \cdot)$ como $\mathbf{u} \in H_0^1(\Omega)$, por la desigualdad de Poincaré, $\|\mathbf{u}\| \leq C_1 \|\nabla \mathbf{u}\|$, las normas $\|\mathbf{u}\|_1$ y $\|\nabla \mathbf{u}\|$ son equivalente, y entonces $\alpha(\cdot, \cdot)$ es coerciva, es decir, existe un $C_2 > 0$ tal que

$$\alpha(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \geq C_2 \|\mathbf{v}\|^2 \quad \text{para todo } \mathbf{v} \in \mathbf{V}$$

por lo tanto, $\alpha(\cdot, \cdot)$ cumple una de las condiciones $\inf - \sup$.

$$\sup_{\mathbf{v} \in \mathbf{W}} \frac{\alpha(\mathbf{u}, \mathbf{v})}{\|\mathbf{v}\|_1} \geq \frac{\alpha(\mathbf{u}, \mathbf{u})}{\|\mathbf{u}\|_1} \geq C_2 \|\mathbf{u}\|_1$$

para $C_2 > 0$. La otra se da por el hecho de su simetría. Igualmente verificamos que $\alpha(\cdot, \cdot)$ es continua en \mathbf{V} , aplicando la desigualdad de Hölder

$$|\alpha(\mathbf{u}, \mathbf{v})| \leq \|\nabla \mathbf{u}\| \|\nabla \mathbf{v}\|$$

y en vista de la equivalencia de normas, resulta que

$$|\alpha(\mathbf{u}, \mathbf{v})| \leq \|\mathbf{u}\|_1 \|\mathbf{v}\|_1$$

Para determinar la condición inf – sup para $b(\cdot, \cdot)$ hacemos uso del Lema 1.2.1, de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \sup_{\mathbf{v} \in H_0^1} \frac{b(\mathbf{v}, q)}{\|\mathbf{v}\|_1} &= \sup_{\mathbf{v} \in H_0^1} \frac{-\langle q, \operatorname{div} \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{v}\|_1} \\ &\geq \frac{-\langle q, \operatorname{div} \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{v}\|_1} = \frac{\|q\|^2}{\|\mathbf{v}\|_1} \\ &\geq \frac{1}{C} \|q\| \end{aligned} \quad (2.10)$$

Por lo tanto $b(\cdot, \cdot)$ cumple Inf-Sup y concluimos que el problema (2.9) tiene solución y esta es única.

2.3.3 Análisis para Stokes no estacionario

Dado el análisis para el caso estacionarios, basándonos en la teoría desarrollada por Girault, V. & Raviart P. [17, Cap. V, §1.2] y Temam R. [21] para un problema de Navier-Stokes, estudiamos bajo que condiciones se plantea la unicidad y existencia considerando el problema variacional (2.3).

Inicialmente, sea $\mathcal{V} := \{\mathbf{v} \in H_0^1(\Omega), \text{ tal que } \operatorname{div} \mathbf{v} = 0\}$ el espacio de funciones de divergencia nula y dado que la forma bilineal $\alpha(\cdot, \cdot)$ es lineal y continua, consideremos el operador A_0 definido sobre $L^2(0, T; L^2(\Omega))$ tal que $\langle A_0 \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \alpha(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ para todo $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$. Por lo tanto, se plantea el siguiente problema: Dado la funciones $f \in L^2(0, T; H_0^{-1}(\Omega))$ y $\mathbf{u}_0 \in L^2(\Omega)$. Encontrar $\mathbf{u} \in \mathcal{W}(0, T; H_0^1(\Omega))$ tal que

$$\mathbf{u} \in \mathcal{V} \quad (2.11a)$$

$$\langle \partial_t \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + (A\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \langle f, \mathbf{v} \rangle \quad \text{en } \Omega \times]0, T[\quad (2.11b)$$

$$\mathbf{u}(\cdot, 0) = \mathbf{u}_0 \quad \text{en } \Omega \quad (2.11c)$$

Para todo $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$. Al respecto, mediante modificaciones de los resultados encontrados por Temam R. en [21], el sistema presenta solución única.

Teorema 2.2. [21, Cap III. Teorema 1.1] Para un determinado $\mathbf{f} \in \mathcal{W}(0, T; H_0^{-1}(\Omega))$ y $\mathbf{u}_0 \in L^2(\Omega)$ el sistema 2.11 tiene única solución.

En vista de este resultado, analizamos las característica necesarias y suficientes para generar un equivalencia entre nuestra formulación variacional (2.3) y el problema (2.11) permitiendo deducir la existencia y unicidad para caso no estacionario. Es evidente que si (\mathbf{u}, p) es solución de (2.3), entonces \mathbf{u} satisface a (2.11). En el caso contrario, el proceso inverso no resulta tan inmediato. Ver [17, Teorema 13 Cap. 5]. Si \mathbf{u} es solución de (2.11) entonces se garantiza que $\text{div } \mathbf{u} = 0$, faltando introducir la variable presión. Para tal propósito, tenemos que

$$\langle \partial_t \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle - \mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$$

eligiendo un arbitrario $t \in [0, T]$, integramos de 0 a t la igualdad

$$\begin{aligned} \int_0^t \langle \partial_t \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle dt &= \int_0^t \langle \mathbf{f}(s), \mathbf{v} \rangle ds - \int_0^t \mathbf{a}(\mathbf{u}(s), \mathbf{v}) ds \\ \langle \mathbf{u}(t), \mathbf{v} \rangle - \langle \mathbf{u}_0, \mathbf{v} \rangle &= \int_0^t \langle \mathbf{f}(s), \mathbf{v} \rangle ds - \int_0^t \mathbf{a}(\mathbf{u}(s), \mathbf{v}) ds \end{aligned}$$

Análogamente se establece que

$$\int_0^t \langle \mathbf{f}(s), \mathbf{v} \rangle ds - \int_0^t \mathbf{a}(\mathbf{u}(s), \mathbf{v}) ds - \langle \mathbf{u}(t), \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{u}_0, \mathbf{v} \rangle = 0$$

Según el Lema 1.2.1, existe un $p(t) \in L^2$ tal que

$$\nabla p(t) = \int_0^t \mathbf{f}(s) + \int_0^t \Delta \mathbf{u}(s) - \mathbf{u}(t) + \mathbf{u}_0$$

o

$$-\langle p(t), \text{div } \mathbf{v} \rangle = \int_0^t [\langle \mathbf{f}(s), \mathbf{v} \rangle - \mathbf{a}(\mathbf{u}(s), \mathbf{v})] ds - \langle \mathbf{u}(t), \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{u}_0, \mathbf{v} \rangle \quad (2.12)$$

Ahora, note que (2.12) es diferenciable sobre el tiempo. Entonces

$$-\langle \partial_t p, \text{div } \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle - \mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - \langle \partial_t \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \quad (2.13)$$

Por lo tanto si tomamos el conjunto $p = \partial_t p$ en $\Omega \times]0, T[$, obtenemos la equivalencia. De (2.13) se deriva que $\partial_t \mathbf{u} + \nabla p \in L^2(0, T; H_0^{-1}(\Omega))$

Capítulo 3

Elementos finitos

Una de las estrategias para determinar una solución numérica de un sistema variacional es aproximar la exacta solo en los espacios finitos generados de la discretización del espacio de interés. Entre los distintos métodos, se encuentra el método de elementos finitos (MEF). Tal como hemos indicado, el MEF ha adquirido una gran importancia en la solución de problemas, por ejemplo, de ingeniería y físicos, puesto que permite resolver casos facilitando la implementación en un programa computacional, debido a que el tratamiento de un problema en particular debe efectuarse un número muy elevado de operaciones para resolver sistemas algebraicos del orden de cientos de ecuaciones.

En este trabajo, consideramos la aproximación por métodos de elementos finitos conformes (EFC). Se dice que la discretización es interna o conforme si los espacios de dimensión finita son sub-espacios de los espacios infinito-dimensionales [13]. En el caso del problema de Stokes, por determinar un planteamiento mixto y del hecho de la condición de incompresibilidad no implica la variable de presión, la construcción de los elementos finitos, en algunos casos resulta inestable. En este sentido los espacios discretos destinados a la aproximación de las campos de velocidades y presión no pueden ser elegidos independientemente uno de otro.

Una vez establecida la característica del espacio finito-dimensional, lo que se hace es elegir adecuadamente una base que lo genere, y a partir de esta se construye por combinación lineal una sucesión de elementos que se aproximan a la solución del problema variacional. Este procedimiento se conoce como método de Galerkin (MG).

Así toda aproximación de funciones, \mathbf{v}^h y q^h , en el espacio, para el caso estacionario, se pueden escribir de la forma

Funciones Velocidad

$$\mathbf{v}^h(\mathbf{x}) = \begin{Bmatrix} \mathbf{v}_1^h \\ \mathbf{v}_2^h \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_{j=1}^m \beta_j \Phi_j(\mathbf{x}) \\ \sum_{j=1}^m \beta_j \Phi_j(\mathbf{x}) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1 & 0 & \phi_2 & \cdots & 0 \\ 0 & \phi_1 & 0 & \cdots & \phi_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1^1 \\ \beta_1^2 \\ \vdots \\ \beta_m^1 \\ \beta_m^2 \end{bmatrix}$$

donde β_j es el valor de las componentes del vector velocidad en el m -ésimo nodo, y ϕ_j las funciones base globales, que satisfacen

$$\phi_j(\mathbf{x}_i) = \delta_{ij} \quad i, j = 1, \dots, m.$$

Denotamos por δ_{ij} la función delta de Kronecker.

Funciones Presión

$$q^h(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{\hat{m}} \alpha_j \psi_j(\mathbf{x}) \quad (3.1)$$

donde α es el valor de la variable presión en los nodos globales, las funciones ψ satisfacen

$$\psi_j(\mathbf{x}_i) = \delta_{ij} \quad i, j = 1, \dots, \hat{m}$$

En este capítulo, presentamos los espacios discretos adecuados sobre Ω para derivar la formulación variacional semidiscretas, utilizando los elementos finitos conformes (FC), propuestos por Taylor & Hood P2–P1. (ver los trabajos de Girault & Raviart [17], Crouzeix & Raviart [13]).

3.1 Consideraciones generales

Resolver el problema variacional implica el cálculo de las integrales donde intervienen funciones definidas sobre el dominio Ω y caracterizadas dentro de los espacios funcionales. El problema aproximante, transforma este cálculo de integrales, sobre $\overline{\Omega}$ pero con funciones escritas como combinaciones lineales de las que forman una base para los espacios discretos; esto sugiere entonces la aproximación de las integrales por medio de una partición del dominio [23]. En esta Sección definimos el tipo de partición establecido y los conjuntos alrededor de este.

Definición 3.1. Para cada $k \in \mathbb{Z}$, denotamos por $\mathbb{P}_k(\gamma)$ como el espacio de todos polinomios, de grado menor o igual que k , definidos sobre γ . La dimensión de \mathbb{P}_k es $\frac{1}{2}(k+1)(k+2)$.

Definición 3.2. En \mathbb{R}^2 , un 2-simplex \mathcal{T} , denota un triángulo con vértices $\{a_j\}_{j=1}^3$ tal que

$$\mathcal{T} = \left\{ \mathbf{x} = \sum_{j=1}^3 \lambda_j \mathbf{a}_j; \quad 0 \leq \lambda_j \leq 1, \quad \sum_{j=1}^3 \lambda_j = 1 \right\}.$$

donde los λ_j representan las coordenadas baricéntricas de \mathcal{T} , que verifican $\lambda_j(a_i) = \delta_{ij}$. Denotamos por $\rho_{\mathcal{T}}$ el diámetro de la circunferencia, más grande, inscrita en \mathcal{T} y $h_{\mathcal{T}}$ el diámetro del lado mayor (Ver figura 3.1).

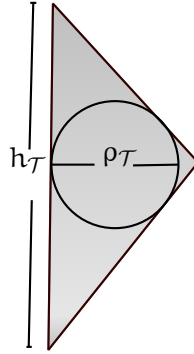


Figura 3.1: 2-simplex

Sea \mathcal{T}_h una triangulación de $\overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^2$ regular, ver figura 3.2, que cumplen las siguientes

condiciones:

1. $\bigcup_{\mathcal{T} \in \mathcal{T}_h} \mathcal{T} = \overline{\Omega}$. donde \mathcal{T} es un 2-simplex
2. Para cada $\mathcal{T} \in \mathcal{T}_h$ la frontera $\partial\mathcal{T}$ es Lipschitz continua y su interior no vacío
3. La intersección de dos elementos \mathcal{T} diferentes de la triangulación \mathcal{T}_h , está vacía o coincide en una común lado o un vértice común.
4. $\frac{h_{\mathcal{T}}}{\rho_{\mathcal{T}}} \leq C$, para $C > 0$.

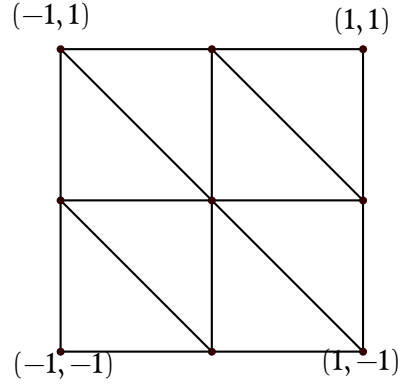


Figura 3.2: Mallado triangular \mathcal{T}_h de Ω

Por otra parte, se define $\mathcal{E}(\mathcal{T})$ y $\mathcal{N}(\mathcal{T})$ conjuntos de lados y los vértices de \mathcal{T} , respectivamente. Dado $E \in \mathcal{E}(\mathcal{T})$, denotamos por \mathcal{N}_E el conjunto de vértices de E . De igual forma para \mathcal{T}_h , se define

$$\mathcal{E}_h = \bigcup_{\mathcal{T} \in \mathcal{T}_h} \mathcal{E}(\mathcal{T}), \quad \mathcal{N}_h = \bigcup_{\mathcal{T} \in \mathcal{T}_h} \mathcal{N}(\mathcal{T}).$$

Además, estos pueden ser divididos en

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_h &= \mathcal{E}_{h,\Omega} \cup \mathcal{E}_{h,D} \cup \mathcal{E}_{h,N} \\ \mathcal{N}_h &= \mathcal{N}_{h,\Omega} \cup \mathcal{N}_{h,D} \cup \mathcal{N}_{h,N} \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{h,D} &:= \left\{ E \in \mathcal{E} : E_h \subset \Gamma_D \right\}, & \mathcal{E}_{h,N} &:= \left\{ E \in \mathcal{E}_h : E \subset \Gamma_N \right\}, \\ \mathcal{N}_{h,D} &:= \left\{ x \in \mathcal{N}_h : x \in \Gamma_D \right\}, & \mathcal{N}_{h,N} &:= \left\{ x \in \mathcal{N}_h : x \in \Gamma_N \right\}.\end{aligned}$$

En base a lo anterior consideramos los siguientes conjuntos.

$$\begin{aligned}\omega_{\mathcal{T}} &= \bigcup_{\mathcal{E}(\mathcal{T}) \cap \mathcal{E}(\mathcal{T}') \neq \emptyset} \mathcal{T}', & \omega_E &= \bigcup_{E \in \mathcal{E}(\mathcal{T}')} \mathcal{T}', \\ \hat{\omega}_{\mathcal{T}} &= \bigcup_{\mathcal{N}(\mathcal{T}) \cap \mathcal{N}(\mathcal{T}') \neq \emptyset} \mathcal{T}', & \hat{\omega}_E &= \bigcup_{\mathcal{N}_E \cap \mathcal{N}(\mathcal{T}') \neq \emptyset} \mathcal{T}'.\end{aligned}$$

A continuación, se define el salto y el promedio sobre los lados para una función. Asociamos un vector unitario \mathbf{n}_E para cada lado $E \in \mathcal{E}_h$, el cual es ortogonal e igual al vector normal unitario si $E \in \mathcal{E}_{h,N}$. Dado una función $\mathbf{v} \in L^2(\omega_E)$ con $\mathbf{v}|_E \in \mathcal{C}(\mathcal{T}')$ para todo $\mathcal{T}' \subset \omega_E$, denotamos por $[\mathbf{v}]$ el salto de \mathbf{v} a través $E \in \mathcal{E}_{h,\Omega}$ en dirección de \mathbf{n}

$$[\mathbf{v}]_E(x) := \lim_{\gamma \rightarrow 0^+} \mathbf{v}(x + \gamma \mathbf{n}_E) - \lim_{\gamma \rightarrow 0^-} \mathbf{v}(x - \gamma \mathbf{n}_E)$$

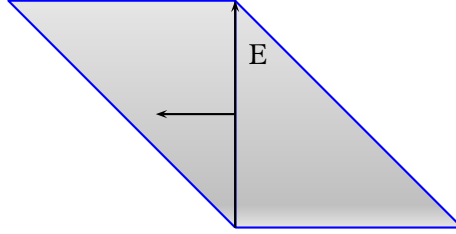


Figura 3.3: Vector unitario \mathbf{n}_E

llamaremos $\Sigma_{\mathcal{T}}$ al conjunto de grado de libertad, para $\mathcal{T} \in \mathcal{T}_h$. Sea \mathcal{T}_e el elemento con vértices $e_1 = (0,0)$, $e_2 = (1,0)$, $e_3 = (0,1)$, y puntos medios $e_4 = (\frac{1}{2}, 0)$, $e_5 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $e_6 = (0, \frac{1}{2})$, ver figura 3.4 .

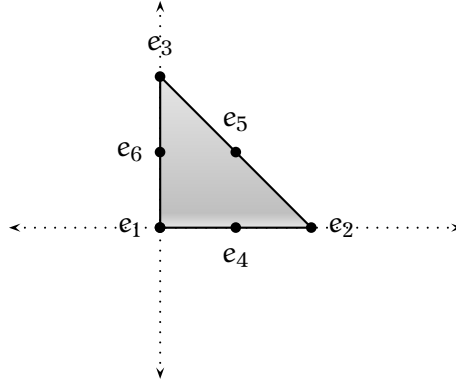


Figura 3.4: Elemento de referencia \mathcal{T}_e

3.2 Elementos finitos conformes

En esta sección, consideramos los espacios de elementos finitos conformes $\mathcal{M}_1 \subset V$ y $G_1 \subset Q$ utilizados para la discretización espacial del problema no estacionario de Stokes, caracterizando sus aspectos básicos, por ejemplo, el tipo de mallado, el espacio polinomial y los grados de libertad. Basándonos en el trabajo realizado por P. Hood & C. Taylor (ver [20]), donde propone aproximar las variables mediante los espacios polinomial $\mathbb{P}_2 - \mathbb{P}_1$, cuyo elemento consiste en funciones polinómicas cuadráticas definidas a trozos, globalmente y localmente continuas para el espacio de velocidades, y funciones lineales globalmente y localmente continuas para el espacio de presiones.

3.2.1 Espacios discretos conformes

Definición 3.3. Elemento Conforme en $H^1(\Omega)$

Sea V^h un espacio de elementos finitos tal que,

$$\mathbb{P}_k \subset H^1(\mathcal{T}), \quad \mathcal{T} \in \mathcal{T}_h$$

$$V_h \in C_0^0(\Omega)$$

Entonces $V_h \subset H_0^1(\Omega)$.

Consideremos el espacio de polinomios $\mathbb{P}_1(\mathcal{T})$, teniendo en cuenta el conjunto base $\{1, x, y\}$ y el conjunto de grados de libertad $\Sigma_{\mathcal{T}}$.

$$\Sigma_{\mathcal{T}} = \left\{ \psi(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in \mathcal{N}(\mathcal{T}), \psi \in \mathbb{P}_1 \right\}$$

El elemento finito definido por la tripleta $(\mathcal{T}, \mathbb{P}_1, \Sigma_{\mathcal{T}})$ es unisolviente, es decir, todo $\psi \in \mathbb{P}_1$ se determina de forma única por sus grados de libertad en $\Sigma_{\mathcal{T}}$.

Por lo anterior definimos el siguiente espacio de elemento finitos unisolviente para la variable presión. (ver [13, Sec. 4]).

Definición 3.4. Sea \mathcal{T}_h una triangulación de Ω , para un $t \in [0, T]$

$$G(\mathcal{T}) := \left\{ q^h \in L^2(\Omega) : q^h|_{\mathcal{T}} \in \mathbb{P}_1(\mathcal{T}); \forall \mathcal{T} \in \mathcal{T}_h \right\}.$$

Note que las funciones q^h son continuas sobre todos el espacio y \mathbb{P}_1 se define sobre los vértices del elemento. De igual forma definimos el espacio finito para la variable velocidad, dado $\mathbb{P}_2(\mathcal{T})$, con conjunto de grados de libertad $\Sigma_{\mathcal{T}}^2$ como el formado por los puntos vértice $\mathbf{x} \in \mathcal{N}$ y puntos medios $\mathbf{b} \in \mathcal{E}$ para cada \mathcal{T} de la siguiente forma.

Definición 3.5. Sea \mathcal{T}_h una triangulación de Ω , para un $t \in [0, T]$

$$\mathcal{M}(\mathcal{T}) = \left\{ \mathbf{v}^h \in H^1(\Omega)^2 : \mathbf{v}^h|_{\mathcal{T}} \in \mathbb{P}_2 \forall \mathcal{T} \in \mathcal{T}_h \right\}$$

Lema 3.2.1. Un elemento finito definido por \mathcal{T}_e , el espacio $\mathbb{P}_2(\mathcal{T})$ y el conjunto $\Sigma_{\mathcal{T}}^2$ es unisolviente y conforme .

El problema continuo (2.3) bajo los espacios de elementos finitos conforme expuestos, consisten

Formulación semidiscreta

Encontrar dos funciones $\mathbf{U}^h(t) \in \mathcal{M}$ y $P^h(t) \in G$ solución del sistema

$$\begin{aligned} \langle \partial_t \mathbf{U}^h, \mathbf{v}^h \rangle + \int_{\Omega} \nabla \mathbf{U}^h : \nabla \mathbf{v}^h - \langle P^h, \operatorname{div} \mathbf{v}^h \rangle &= \langle \mathbf{f}, \mathbf{v}^h \rangle + \langle \mathbf{g}, \mathbf{v}^h \rangle \\ \langle q^h, \operatorname{div} \mathbf{U}^h \rangle &= 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

Para todo $\mathbf{v}^h \in \mathcal{M}$, $q^h \in G$, $0 < t \leq T$ sujeto a las condiciones iniciales.

$$\mathbf{U}^h(\cdot, 0) = \mathbf{u}_0 \in \mathcal{M}$$

Aquí \mathbf{u}_0 es la L^2 -proyección, definida en las próximas secciones, de $\mathbf{u}(\cdot, 0)$. Además $\mathbf{U}^h(\cdot, t) = 0$ para todo $E \in \Gamma_1$ y $\mathbf{U}^h(\cdot, t) = \mathbf{g}$ en Γ_2

A continuación ilustramos la descripción del cálculo de funciones base local de los espacio finitos para el elemento de referencia \mathcal{T}_e . Las siguientes son funciones base ψ_i , con $1 \leq i \leq 3$ en \mathcal{T}_e . (ver Fig. 3.5)

$$\psi_1 = 1 - x - y \quad \psi_2 = x \quad \psi_3 = y$$

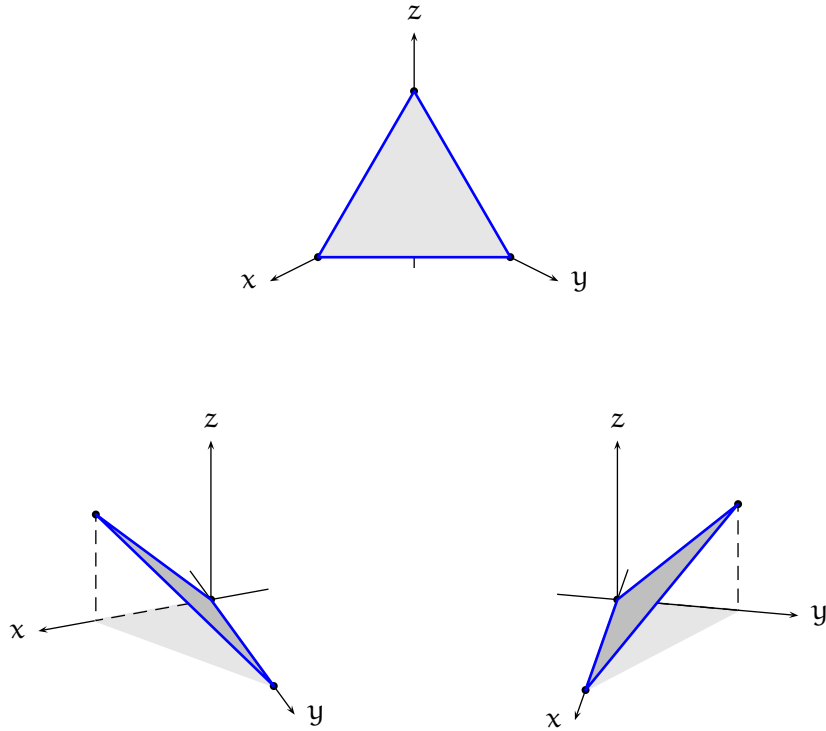


Figura 3.5: Funciones bases local ψ_i para funciones presión

Asimismo, Obtenemos funciones base $\{\phi\}_{i=1}^6$ asociadas a los puntos medios y vértices. (ver Fig.3.6), con $\mathbf{i} = (1, 0)$ y $\mathbf{j} = (0, 1)$ vectores canónicos,

$$\begin{aligned} \phi_1^e(x, y) &= (1 - x - y)(1 - 2y - 2x)\mathbf{i} & \phi_4^e(x, y) &= (1 - x - y)(1 - 2y - 2x)\mathbf{j} \\ \phi_2^e(x, y) &= x(2x - 1)\mathbf{i} & \phi_5^e(x, y) &= x(2x - 1)\mathbf{j} \\ \phi_3^e(x, y) &= 2y(y - 1)\mathbf{i} & \phi_6^e(x, y) &= 2y(y - 1)\mathbf{j} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi_7^e(x, y) &= 4x(1 - y - x)\mathbf{i} & \phi_{10}^e(x, y) &= 4x(1 - y - x)\mathbf{j} \\
\phi_8^e(x, y) &= 4yx\mathbf{i} & \phi_{11}^e(x, y) &= 4yx\mathbf{j} \\
\phi_9^e(x, y) &= 4y(1 - x - y)\mathbf{i} & \phi_{12}^e(x, y) &= 4y(1 - x - y)\mathbf{j}.
\end{aligned}$$

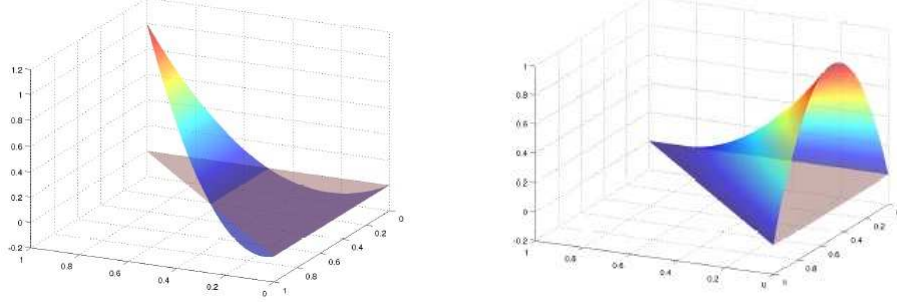


Figura 3.6: Ejemplo de funcion bases local ϕ_i para componentes de las funciones velocidad

3.3 Espacios discreto dependiente del tiempo

En esta sección, presentamos los espacios discretos dependiente del tiempo adecuados, para aplicar MGD y derivar el sistema variacional totalmente discreto del problema 2.3 basándonos en el trabajo realizado por R. Prato [18]. Además se define L^2 -proyección de Erikson (Ver [15]). Considerando la partición, no necesariamente uniforme, $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$ del intervalo de tiempo $[0, T]$ en sub-intervalos $I_n =]t_{n-1}, t_n]$ de longitud $k_n := t_n - t_{n-1}$ asociando cada intervalo de tiempo una triangulación $\mathcal{T}_h^n = \mathcal{T}_{hn}$ de Ω . Definimos los siguiente espacios de funciones polinómicas de grado l en t con coeficiente en los espacio discreto \mathcal{M} y G sobre I_n de la siguiente forma

$$V_h^{n,l} := \left\{ v : I_n \mapsto \mathcal{M}, \quad v(t) = \sum_{i=0}^l t^i \Phi, \quad \Phi \in \mathcal{M}(\mathcal{T}_h), \quad t \in I_n \right\} \quad (3.3)$$

$$Q_h^{n,l} := \left\{ q : I_n \mapsto G, \quad q(t) = \sum_{i=0}^l t^i \Psi, \quad \Psi \in G(\mathcal{T}_h), \quad t \in I_n \right\} \quad (3.4)$$

y también extendidos sobre todo el intervalo

$$\tilde{V}_h^l = \left\{ \mathbf{v} \in L^2([0, T], \mathcal{M}); \quad \mathbf{v}|_{I_n} \in V, \quad n = 1, \dots, N \right\} \quad (3.5)$$

$$\tilde{Q}_h^l = \left\{ q \in L^2([0, T], G); \quad q|_{I_n} \in Q, \quad n = 1, \dots, N \right\} \quad (3.6)$$

Ahora, siguiendo el trabajo realizado Eriksson en [15], definimos el L^2 -proyección " π " en el tiempo sobre el espacio $V_h^{n,l}$ como

$$\pi_l : L^2(I_n, \mathcal{M}) \rightarrow V_h^{n,l} \quad l = 0, 1$$

$$\begin{aligned} \pi_0 \mathbf{v} &:= \frac{1}{k_n} \int_{I_n} \mathbf{v} \, dt \\ \pi_1 \mathbf{v} &:= \pi_0 \mathbf{v} + \frac{12}{k_n^3} \left(t - t_{n-1} - \frac{k_n}{2} \right) \int_{I_n} \left(s - t_{n-1} - \frac{k_n}{2} \right) \mathbf{v} \, ds \\ &:= \mathbf{v}_1 + \frac{t - t_{n-1}}{k_n} \mathbf{v}_2 \end{aligned} \quad (3.7)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1(x) &= \frac{1}{k_n} \int_{I_n} \left(4 - 6 \frac{s - t_{n-1}}{k_n} \right) \mathbf{v}(x, s) \, ds \\ \mathbf{v}_2(x) &= \frac{1}{k_n} \int_{I_n} \left(12 \frac{s - t_{n-1}}{k_n} - 6 \right) \mathbf{v}(x, s) \, ds \end{aligned}$$

Lema 3.3.1. [18, Lema 2.4.1] Sea $\mathbf{v} \in L^2(I_n, \mathcal{M})$ entonces

$$\begin{aligned} \int_{I_n} \langle \pi_l \mathbf{v}(t), \mathbf{w}(t) \rangle \, dt &= \int_{I_n} \langle \mathbf{v}(t), \mathbf{w}(t) \rangle \, dt \\ \int_{I_n} A(\pi_l \mathbf{v}(t), \mathbf{w}(t)) \, dt &= \int_{I_n} A(\mathbf{v}(t), \mathbf{w}(t)) \, dt \end{aligned}$$

Para todo $\mathbf{w} \in L^2(I_n, L^2(\Omega))$, \mathbf{w} polinomio de grado l en t y $A(\cdot, \cdot)$ una forma bilineal arbitraria

Capítulo 4

Discretización en tiempo y espacio

En el presente capítulo, utilizamos el método de Galerkin discontinuo (GD), con el fin de obtener un esquema totalmente discreto. El espacio de la función de elementos finitos correspondiente a GD consta de polinomios a trozos (u otras funciones simples) que están autorizados para ser discontinua a través de los nodos temporales. Por los tanto, utilizamos funciones polinomial a trozos de grado 0 y 1 en la variable temporal. Evidentemente dentro de este procedimiento se plantea un discretización en el espacio, sin embargo en este capitulo se determina un modelo general, tanto para conformes como para los no conformes. Un análisis completo del método de Galerkin discontinuo se puede encontrar, por ejemplo, Thomée [22].

4.1 Formulación totalmente discreto

Consideremos la partición, no necesariamente uniforme, $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$ del intervalo de tiempo $[0, T]$ en sub-intervalos $I_n =]t_{n-1}, t_n]$ de longitud $k_n := t_n - t_{n-1}$ asociando cada intervalo de tiempo una triangulación $\mathcal{T}_h^n = \mathcal{T}_{hn}$ de Ω . Denotamos como $[v]_n := \mathbf{v}_n^+ - \mathbf{v}_n^-$ el salto de \mathbf{v} en t_n , en donde

$$\mathbf{v}_n^+ = \lim_{t \rightarrow 0^+} \mathbf{v}(t_n + t), \quad \mathbf{v}_n^- = \lim_{t \rightarrow 0^-} \mathbf{v}(t_n + t)$$

Para el esquema totalmente discreto usaremos los siguientes subespacios finitos, definidos en (3.3), de funciones sobre cada intervalo I_n de la siguiente forma

$$\begin{aligned} V_h^{n,l} &= \left\{ \mathbf{v} \in L^2(I_n, \mathcal{M}), \mathbf{v}(t) = \sum_{i=0}^l t^i \Phi, \quad \Phi \in \mathcal{M}(\mathcal{T}_h), t \in I_n \right\} \quad y \\ \tilde{V}_h^l &= \left\{ \mathbf{v} \in L^2([0, T], \mathcal{M}); \quad \mathbf{v}|_{I_n} \in V_h^{n,l}, \quad n = 1, \dots, N \right\} \end{aligned}$$

Determinamos el esquema GD del problema (2.3), multiplicamos por una función $\mathbf{v} \in \tilde{V}_h^l$ tal que $\mathbf{v}(t_N) = 0$, para todo $N > 0$, e integrando sobre $]0, T]$, como mostramos a continuación

$$\begin{aligned} \int_0^T \langle \mathbf{u}, \partial_t \mathbf{v} \rangle dt + \int_0^T \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} dt - \int_0^T \langle p, \operatorname{div} \mathbf{v} \rangle dt &= \langle \mathbf{u}(0), \mathbf{v}(0) \rangle + \int_0^T F(\mathbf{v}) \quad (4.1) \\ \int_{I_n} \langle q, \operatorname{div} \mathbf{u} \rangle dt &= 0 \end{aligned}$$

Observase que si $\mathbf{u} = \mathbf{U}^h \in \tilde{V}_h^l$, el primer término de (4.1), resulta

$$\begin{aligned} \int_0^T \langle \mathbf{U}^h, \partial_t \mathbf{v} \rangle dt &= \sum_{n=1}^N \int_{I_n} \langle \mathbf{U}^h, \partial_t \mathbf{v} \rangle dt = \int_{\Omega} \sum_{n=1}^N \int_{t_{n-1}}^{t_n} \mathbf{U}^h \cdot \partial_t \mathbf{v} dt \\ &= \int_{\Omega} \sum_{n=1}^N \left[\mathbf{U}^h \cdot \mathbf{v}|_{t_{n-1}}^{t_n} - \int_{t_{n-1}}^{t_n} \partial_t \mathbf{U}^h \cdot \mathbf{v} dt \right] dt \\ &= \int_0^T \langle \partial_t \mathbf{U}^h, \mathbf{v} \rangle dt + \sum_{n=2}^{N-1} \langle [\mathbf{U}^h]_{n-1}, \mathbf{v}_{n-1} \rangle + \langle \mathbf{U}^h_0^+, \mathbf{v}_0^+ \rangle \end{aligned}$$

En consecuencia, el problema discreto consiste:

Formulación variacional totalmente discreta

Hallar $\mathbf{U}^h \in \tilde{V}_h^l$ y $P \in \tilde{Q}_h^l$ solución de

$$\begin{aligned} \int_0^T \left\{ \langle \partial_t \mathbf{U}^h, \mathbf{v} \rangle_{\Omega} + \int_{\Omega} \nabla \mathbf{U}^h : \nabla \mathbf{v} - \langle P^h, \operatorname{div} \mathbf{v} \rangle_{\Omega} \right\} dt + \sum_{n=2}^{N-1} \langle [\mathbf{U}^h]_{n-1}, \mathbf{v}_{n-1} \rangle + \langle \mathbf{U}^h_0^+, \mathbf{v}_0^+ \rangle \\ = \langle \mathbf{U}^h_0^-, \mathbf{v}_0^+ \rangle + \int_0^T F(\mathbf{v}) dt \\ \langle \mathbf{U}^h, \nabla q \rangle = 0 \end{aligned}$$

Para todo $\mathbf{v} \in \tilde{V}_h^l$ y $q \in \tilde{Q}_h^l$ donde $\mathbf{U}^h_0^- = \mathbf{u}_0$

La anterior formulación es equivalente a:

Encontrar $\mathbf{U}_n^h \in V_h^{n,l}$ y $P_n^h \in Q_h^{n,l}$, tal que

$$\begin{aligned} \int_{I_n} \{ \langle \partial_t \mathbf{U}_n^h, \mathbf{v} \rangle_\Omega + \int_\Omega \nabla \mathbf{U}_n^h : \nabla \mathbf{v} - \langle P_n^h, \operatorname{div} \mathbf{v} \rangle_\Omega \} dt \\ + \langle [\mathbf{U}^h]_{n-1}, \mathbf{v}_{n-1}^+ \rangle_\Omega = \int_{I_n} F(\mathbf{v}) dt \quad (4.2) \\ \langle \mathbf{U}_n^h, \nabla q \rangle = 0 \end{aligned}$$

Para $n = 1, 2, \dots, N$ y todo $\mathbf{v} \in V_h^{n,l}$ y $q \in Q_h^{n,l}$.

A continuación consideremos el caso de funciones a trozo afín constante ($l = 1$) y lineal ($l = 2$) de funciones de base en el tiempo. En ambos casos la función P es tomada como una función constante sobre el tiempo I_n .

4.2 Función constante a trozo en el tiempo

Tanto las funciones de prueba como las aproximación son tomadas como funciones constantes a trozo en los intervalos de tiempo I_n con $n = 1, \dots, N$. Así,

$$\partial_t \mathbf{U}_n^h = 0, \quad \mathbf{U}_{n-1}^{h+} = \mathbf{U}_n^h, \quad \mathbf{U}_{n-1}^{h-} = \mathbf{U}_{n-1}^h$$

Luego, el problema (4.2) se reduce a:

Para $n = 1, \dots, N$, hallar $\mathbf{U}_n^h \in V_h^n$ y $P^h \in Q_h^n$ tal que

$$\begin{aligned} K_n \left\{ \int_\Omega \nabla \mathbf{U}_n^h : \nabla \mathbf{v} - \langle P, \operatorname{div} \mathbf{v} \rangle_\Omega \right\} + \langle \mathbf{U}_n^h, \mathbf{v} \rangle = (\mathbf{U}_{n-1}^h, \mathbf{v}) + \int_{I_n} F(\mathbf{v}) \quad (4.3) \\ k_n \langle \mathbf{U}_n^h, \nabla q \rangle = 0 \end{aligned}$$

En este caso, el método GD se reduce al método de Euler hacia atrás modificado [22, Pág. 205].

4.3 Función lineal a trozo en el tiempo

En esta sección, consideramos las funciones test, como lineales ($l = 1$) a trozo sobre el intervalo de tiempo I_n con $n = 1, \dots, N$. La función U_n^h se puede escribir de la siguiente forma:

$$U_n^h(x, t) = U_{n,1}^h(x) + \frac{t-t_{n-1}}{k_n} U_{n,2}^h(x)$$

para cualquier $U_{n,1}^h(x), U_{n,2}^h(x) \in \mathcal{M}$. Tomando, Φ como una función base arbitraria de \mathcal{M} . definimos las siguientes funciones

$$\Phi_1(x, t) = \Phi(x), \quad \Phi_2(x, t) = \frac{t_n-t}{k_n} \Phi(x)$$

Teniendo en cuenta las funciones definidas anteriormente, obtenemos en (4.2):

$$\begin{aligned} \int_{I_n} \langle \partial_t U_n^h, \Phi_1 \rangle dt &= \int_{I_n} \langle \partial_t (U_{n,1}^h + \frac{t-t_{n-1}}{k_n} U_{n,2}^h), \Phi_1 \rangle dt \\ &= \frac{1}{k_n} \int_{I_n} \langle U_{n,2}^h, \Phi \rangle dt \\ &= \frac{1}{k_n} \langle U_{n,2}^h, \Phi \rangle \int_{I_n} dt \\ &= \langle U_{n,2}^h, \Phi \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{I_n} \langle \partial_t U_n^h, \Phi_2 \rangle dt &= \int_{I_n} \langle \partial_t (U_{n,1}^h + \frac{t-t_{n-1}}{k_n} U_{n,2}^h), \frac{t_n-t}{k_n} \Phi \rangle dt \\ &= \frac{1}{k_n} \langle U_{n,2}^h, \Phi \rangle \int_{I_n} \frac{t-t_{n-1}}{k_n} dt \\ &= \frac{1}{k_n} \langle U_{n,2}^h, \Phi \rangle \sum_{n=1}^N \int_{t_{n-1}}^{t_n} \frac{t-t_{n-1}}{k_n} \\ &= \frac{1}{k_n} \langle U_{n,2}^h, \Phi \rangle \frac{1}{k_n} \sum_{n=1}^N \frac{(t-t_{n-1})^2}{2} \Big|_{t_{n-1}}^{t_n} \\ &= \frac{1}{2} \langle U_{n,2}^h, \Phi \rangle \end{aligned}$$

De la misma forma,

$$\begin{aligned}
\int_{I_n} \int_{\Omega} \nabla \mathbf{U}_n^h : \nabla \Phi_1 \, dx dt &= \int_{\Omega} \int_{I_n} \left(\nabla \mathbf{U}_{n,1}^h + \frac{t - t_{n-1}}{k_n} \nabla \mathbf{U}_{n,2}^h \right) : \nabla \Phi_1 \, dt dx \\
&= k_n \int_{\Omega} \nabla \mathbf{U}_{n,1}^h : \nabla \Phi \, dx + \int_{\Omega} \nabla \mathbf{U}_{n,2}^h : \nabla \Phi \, dx \left(\int_{I_n} \frac{t - t_{n-1}}{k_n} dt \right) \\
&= k_n \int_{\Omega} \nabla \mathbf{U}_{n,1}^h : \nabla \Phi \, dx + \frac{k_n}{2} \int_{\Omega} \nabla \mathbf{U}_{n,2}^h : \nabla \Phi \, dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{I_n} \int_{\Omega} \nabla \mathbf{U}_n^h : \nabla \Phi_2 \, dx dt &= \int_{\Omega} \int_{I_n} \left(\nabla \mathbf{U}_{n,1}^h + \frac{t - t_{n-1}}{k_n} \nabla \mathbf{U}_{n,2}^h \right) : \nabla \Phi_2 \, dt dx \\
&= \frac{k_n}{2} \int_{\Omega} \nabla \mathbf{U}_{n,1}^h : \nabla \Phi \, dx + \left(\int_{\Omega} \nabla \mathbf{U}_{n,2}^h : \nabla \Phi \, dx \right) \left(\int_{I_n} \frac{t - t_{n-1}}{k_n} \frac{t_n - t}{k_n} dt \right) \\
&= \frac{k_n}{2} \int_{\Omega} \nabla \mathbf{U}_{n,1}^h : \nabla \Phi \, dx + \frac{k_n}{6} \int_{\Omega} \nabla \mathbf{U}_{n,2}^h : \nabla \Phi \, dx
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\int_{I_n} \langle \mathbf{U}_n^h, \nabla \psi_2 \rangle \, dt &= \int_{I_n} \langle \mathbf{U}_{n,1}^h, \nabla \psi \rangle + \langle \mathbf{U}_{n,2}^h, \nabla \psi \rangle \left(\int_{I_n} \frac{t - t_{n-1}}{k_n} \frac{t_n - t}{k_n} dt \right) \\
&= k_n \langle \mathbf{U}_{n,1}^h, \nabla \psi \rangle + \frac{k_n}{2} \langle \mathbf{U}_{n,2}^h, \nabla \psi \rangle
\end{aligned}$$

$$\langle \mathbf{U}_{n-1}^+, \Phi_{1,n-1}^+ \rangle = \langle \mathbf{U}_{n-1}^+, \Phi_{2,n-1}^+ \rangle = \langle \mathbf{U}_{n,1}^h, \Phi \rangle \quad \int_{I_n} \langle P_n^h, \operatorname{div} \Phi_2 \rangle \, dt = \frac{k_n}{2} \langle P_n^h, \operatorname{div} \Phi \rangle$$

En consecuencia formulamos el método de Galerkin discontinuo de la siguiente forma:

Hallar $\mathbf{U}_{n,1}^h, \mathbf{U}_{n,2}^h \in \mathcal{M}$ y $P_n^h \in G$. tal que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{k_n} \langle \mathbf{U}_{n,2}^h, \mathbf{v} \rangle + \int_{\Omega} \nabla \mathbf{U}_{n,1}^h : \nabla \mathbf{v} \, dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \nabla \mathbf{U}_{n,2}^h : \nabla \mathbf{v} \, dx \\
- \langle P_n^h, \operatorname{div} \mathbf{v} \rangle + \frac{1}{k_n} \langle \mathbf{U}_{n,1}^h, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{U}_n^{h-}, \mathbf{v} \rangle + \int_{I_n} \frac{1}{k_n} F(\mathbf{v}) \, dt
\end{aligned} \tag{4.4}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2k_n} \langle \mathbf{U}_{n,2}^h, \mathbf{v} \rangle + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \nabla \mathbf{U}_{n,1}^h : \nabla \mathbf{v} \, dx + \frac{1}{6} \int_{\Omega} \nabla \mathbf{U}_{n,2}^h : \nabla \mathbf{v} \, dx - \frac{1}{2} \langle P_n^h, \operatorname{div} \mathbf{v} \rangle \\
+ \frac{1}{k_n} \langle \mathbf{U}_{n,1}^h, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{U}_n^{h-}, \mathbf{v} \rangle + \frac{1}{k_n^2} \int_{I_n} (t_n - t) F(\mathbf{v}) \, dt
\end{aligned} \tag{4.5}$$

$$\langle \operatorname{div} \mathbf{U}_{n,1}^h, \mathbf{q} \rangle + \frac{1}{2} \langle \operatorname{div} \mathbf{U}_{n,2}^h, \mathbf{q} \rangle = 0 \tag{4.6}$$

Para $n = 1, 2, \dots, N$ y toda función $\mathbf{v} \in \mathcal{M}$ y $\mathbf{q} \in G$.

4.4 Sistema matricial discreto

En esta sección analizaremos las formulaciones discretas (4.3) y (4.4)-(4.6), obteniendo sistemas matriciales que permitan el tratamiento computacional.

Denotemos por $\{\psi_i\}_{i=1}^{\hat{m}}$ y $\{\Phi_i\}_{i=1}^m$ funciones base de G y \mathcal{M} respectivamente, y acorde al capítulo 3, las aproximaciones de las funciones presión y velocidad se pueden definir como las combinaciones lineales

$$P_n^h = \sum_{j=1}^{\hat{m}} \beta_j \psi_j, \quad U_{n,1}^h = \sum_{j=1}^m \alpha_j \Phi_j, \quad U_{n,2}^h = \sum_{j=1}^m \alpha_j \Phi_j$$

y Fijamos $q = \psi_k$ y $v = \Phi_i$

Para $l = 0$

El sistema de ecuaciones (4.3), resulta

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m \alpha_j a(\Phi_j, \Phi_i) - \sum_{j=1}^{\hat{m}} \beta_j b(\Phi_i, \psi_j) + \frac{1}{k_n} \sum_{j=1}^m \alpha_j \langle \Phi_j, \Phi_i \rangle \\ = \frac{1}{k_n} (U_{n-1}, \Phi_i) + \frac{1}{k_n} \int_{I_n} F(\Phi_i) \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$k_n \sum_{j=1}^m \alpha_j b(\Phi_j, \psi_k) = 0 \quad (4.8)$$

con $i = 1, \dots, m$ y $k = 1, \dots, \hat{m}$. Obteniéndose así el sistema matricial global:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{k_n} \mathcal{A} + \mathcal{K} & \mathcal{B}^T \\ \mathcal{B} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_i \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= (\Phi_j, \Phi_i), & \mathcal{K} &= a(\Phi_j, \Phi_i) \\ \mathcal{B} &= b(\Phi_i, \tilde{\psi}_j), & F_i &= \frac{1}{k_n} \langle U_{n-1}^h, \Phi \rangle + \int_{I_n} F(\Phi_i) \end{aligned}$$

Las matrices \mathcal{A} y \mathcal{K} son llamadas matriz de masa y de rigidez respectivamente. A continuación, siguiendo la técnica de Elemento Por Elemento, indicamos como abor-

daremos las matrices del sistema (4.9).

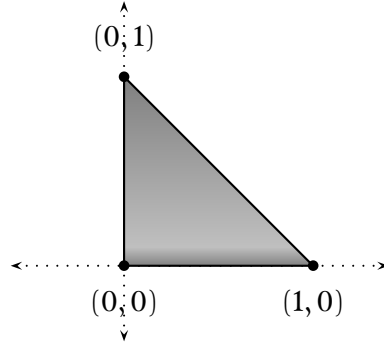


Figura 4.1: Elemento de referencia \mathcal{T}_e

La idea es construir una base local de funciones para el elemento de referencia \mathcal{T}_e y luego por medio de cambio de variable realizamos los cálculos sobre los distintos elementos. Las matrices globales son obtenidas combinando la matrices locales, el ensamble dependerá de la numeración establecida, las condiciones de frontera y la relación entre las funciones local y global.

Denotemos por $\{\tilde{\Phi}_j\}_{j=1}^l$, las funciones base local que satisfacen la condición de la-grange sobre los grados de libertad para un elemento cualquiera. Del mismo modo las funciones $\{\tilde{\psi}_i\}_{i=1}^l$, las contribuciones se determinan calculando

$$a(\tilde{\Phi}_j, \tilde{\Phi}_i)|_r = \int_{\mathcal{T}_r} \nabla \tilde{\Phi}_j : \nabla \tilde{\Phi}_i \quad b(\tilde{\psi}_j, \tilde{\Phi}_i)|_r = \int_{\mathcal{T}_r} \tilde{\psi}_j \cdot \text{div} \tilde{\Phi}_i \quad \langle \tilde{\Phi}_j, \tilde{\Phi}_i \rangle|_r = \int_{\mathcal{T}_r} \tilde{\Phi}_j \cdot \tilde{\Phi}_i$$

por lo tanto,

$$a(\tilde{\Phi}_j, \tilde{\Phi}_i) = \sum_{r=1}^{ne} a(\tilde{\Phi}_j, \tilde{\Phi}_i)_r \quad b(\tilde{\Phi}_j, \tilde{\psi}_i) = \sum_{r=1}^{ne} b(\tilde{\psi}_j, \tilde{\psi}_i)_r \quad \langle \tilde{\Phi}_j, \tilde{\Phi}_i \rangle = \sum_{r=1}^{ne} \langle \tilde{\Phi}_j, \tilde{\Phi}_i \rangle_r$$

donde $r = 1, \dots, ne$ son el numero de elemento. Las matrices locales vienen dadas

$$\hat{\mathcal{K}} = \begin{bmatrix} a(\tilde{\Phi}_1, \tilde{\Phi}_1)_r & 0 & a(\tilde{\Phi}_1, \tilde{\Phi}_2)_r & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a(\tilde{\Phi}_1, \tilde{\Phi}_1)_r & 0 & a(\tilde{\Phi}_1, \tilde{\Phi}_2)_r & \cdots & a(\tilde{\Phi}_1, \tilde{\Phi}_m)_r \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a(\tilde{\Phi}_l, \tilde{\Phi}_1)_r & 0 & a(\tilde{\Phi}_l, \tilde{\Phi}_1)_r & \cdots & a(\tilde{\Phi}_l, \tilde{\Phi}_l)_r \end{bmatrix}_{2l \times 2l}$$

Asimismo, la matriz masa local \hat{A} , es igual a

$$\hat{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} \langle \tilde{\Phi}_1, \tilde{\Phi}_1 \rangle_r & 0 & \langle \tilde{\Phi}_1, \tilde{\Phi}_2 \rangle_r & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \langle \tilde{\Phi}_1, \tilde{\Phi}_1 \rangle_r & 0 & \langle \tilde{\Phi}_1, \tilde{\Phi}_2 \rangle_r & \cdots & \langle \tilde{\Phi}_1, \tilde{\Phi}_l \rangle_r \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \langle \tilde{\Phi}_l, \tilde{\Phi}_1 \rangle_r & 0 & \langle \tilde{\Phi}_l, \tilde{\Phi}_2 \rangle_r & \cdots & \langle \tilde{\Phi}_l, \tilde{\Phi}_l \rangle_r \end{bmatrix}_{2l \times 2l}$$

por último, la matriz divergencia

$$\hat{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} b(\tilde{\Phi}_1, \psi_1)_r & b(\tilde{\Phi}_1, \psi_2)_r & \cdots & b(\tilde{\Phi}_1, \psi_l)_r \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b(\tilde{\Phi}_l, \psi_1)_r & b(\tilde{\Phi}_l, \psi_1)_r & \cdots & b(\tilde{\Phi}_l, \psi_l)_r \end{bmatrix}_{l \times 2l}$$

Para $l=1$

De igual forma que en el caso anterior, en los sistema (4.4) y (4.5) expresamos las variables U_n^h y p^h en términos de combinación lineal de funciones base y coeficientes, obteniendo el siguiente sistema matricial:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{k_n} \mathcal{A} + \mathcal{K} & \frac{1}{k_n} \mathcal{A} + \frac{1}{2} \mathcal{K} & \mathcal{B}^T \\ \frac{1}{k_n} \mathcal{A} + \frac{1}{2} \mathcal{K} & \frac{1}{2k_n} \mathcal{A} + \frac{1}{6} \mathcal{K} & \frac{1}{2} \mathcal{B}^T \\ \mathcal{B} & \frac{1}{2} \mathcal{B} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \hat{\alpha} \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_i^1 \\ F_i^2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{ij} &= \langle \Phi_j, \Phi_i \rangle, \quad \mathcal{K}_{ij} = \langle \nabla \Phi_j, \nabla \Phi_i \rangle \quad \mathcal{B}_{ij} = \langle \text{div } \Phi_j, \psi_i \rangle \quad \mathcal{B}_{ij}^t = \langle \Phi_j, \nabla \psi_i \rangle \\ F_i^1 &= \frac{1}{k_n} (\langle U_{n-1}^-, \Phi \rangle + \int_{\text{In}} F(\Phi)) \quad F_i^2 = \frac{1}{k_n^2} (\langle U_{n-1}^-, \Phi \rangle + \int_{\text{In}} (t_n - t) F(\Phi)) \end{aligned}$$

se contempla que en el sistema de matrices (4.2) su términos conservan la misma naturaleza que (4.9) razón por la cual el análisis de $l = 0$ puede ser adaptado en este.

Lema 4.4.1. *El sistema totalmente discreta (4.2) tiene una única solución*

Prueba. Definimos la matriz de Galerkin como

$$\begin{pmatrix} A & B^T \\ B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.11)$$

Dado que la coercitividad es una propiedad hereditaria, la matriz de rigidez \mathcal{A} es semidefinida positivamente. Asimismo, se observa que para $\mathbf{u} \in H^1(\Omega)$ el producto $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \geq 0$. Por lo tanto

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle + \alpha(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq C \|\mathbf{u}\|_1 \quad C > 0$$

para todo $\mathbf{v} \in H^1(\Omega)$ y obtenemos que la matriz A es definida positiva. Considerando el sistema homogéneo

$$\begin{aligned} A\alpha + B^T\beta &= 0 \\ B\alpha &= 0 \end{aligned}$$

si multiplicamos por α^T , a la izquierda, en la primera ecuación y en la segunda por β^T , mediante la transpuesta de un producto, resulta que $\alpha^T A \alpha = 0$ y por lo previamente indicado sobre la definición de la matriz implica que $\alpha = 0$ afirmando la existencia y unicidad para la variable velocidad. Por otro lado, si tomamos a $\mathbf{u} = 0$ tenemos que la $B^T\beta = 0$, lo que supone dos escenarios $\text{Ker}(B^T) = 0$ o $\text{Ker}(B^T) = 1$ para dominios condiciones de Neumann homogéneas y de otro tipo respectivamente. Esto último se garantiza por medio de las dimensiones de los espacio finito para Ω , a causa de la dimension de la velocidad es mayor que el de la presión, consecuente a la elección de los espacio de Taylor & Hood. ■

Capítulo 5

Estimador de error a posteriori

En este capítulo, teniendo como referencia los trabajos de Bernardi & Verfürth [6], Erikson [15], R. Prato [18] y Verfürth [7] [25], proponemos un estimador de error A Posteriori de tipo residual para el problema de aproximación. Además, presentamos un algoritmo adaptativo teniendo en cuenta a los indicadores de error locales para el refinamiento de la malla del procedimiento de acoplamiento.

Inicialmente introducimos el interpolador de Clément r_h que presenta las siguientes propiedades, ver [12] o [24]: Para toda función $\mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)$, $r_h \mathbf{v}$ pertenece a \mathcal{M} y satisface para todo $\mathcal{T} \in \mathcal{T}_h$ y todo $E \in \mathcal{E}(\mathcal{T})$

$$\text{i) } \|\mathbf{v} - r_h \mathbf{v}\|_{\mathcal{T}} \leq c_1 h_{\mathcal{T}} \|\mathbf{v}\|_{1, \hat{\omega}_{\mathcal{T}}} \quad (5.1a)$$

$$\text{ii) } \|\mathbf{v} - r_h \mathbf{v}\|_E \leq c_2 h_E^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{v}\|_{1, \hat{\omega}_E} \quad (5.1b)$$

$$\text{iii) } \|r_h \mathbf{v}\|_{1, \mathcal{T}} \leq \|\mathbf{v}\|_{1, \hat{\omega}_{\mathcal{T}}} \quad (5.1c)$$

donde $h_{\mathcal{T}}$ y h_E son el diámetro y largo de \mathcal{T} y E respectivamente. Asimismo, denotamos por \mathcal{I} el L^2 -proyección ortogonal (cf. (3.7)) de $r_h \mathbf{v}$, para $\mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)$, en el espacio V_h^n

$$\mathcal{I} = \pi_1 r_h \mathbf{v}$$

Por otra parte, con el fin de facilitar el procedimiento, definimos a $\mathbf{e} := \mathbf{u} - \mathbf{U}_n^h$ y $\epsilon := p - P_n^h$ donde el par (\mathbf{u}, p) son las funciones solución de (2.3) y (\mathbf{U}_n^h, P_n^h) aproximaciones de elementos finitos, consideradas en (4.2). El par (\mathbf{e}, ϵ) , para todo

$t \in I_n := [t_{n-1}, t_n]$, satisfice

$$\langle \partial_t \mathbf{e}, \mathbf{v} \rangle + a(\mathbf{e}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{e}, \mathbf{v}) = \langle \mathcal{R}, \mathbf{v} \rangle \quad (5.2a)$$

$$b(\mathbf{q}, \mathbf{e}) = -\langle \mathcal{R}_c, \mathbf{q} \rangle \quad (5.2b)$$

donde

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{R}, \mathbf{v} \rangle &= \langle F, \mathbf{v} \rangle - \langle \partial_t \mathbf{U}_n^h, \mathbf{v} \rangle - a(\mathbf{U}_n^h, \mathbf{v}) - b(P_n^h, \mathbf{v}) \\ \langle \mathcal{R}_c, \mathbf{q} \rangle &= -\langle \mathbf{q}, \operatorname{div} \mathbf{U}_n^h \rangle \end{aligned}$$

Asumiendo el análisis expuesto por Verfürth en [25], no toda aproximación es totalmente conservadora, es decir $\operatorname{div} \mathbf{U}_n^h = 0$, para todo n , lo que supone una no equivalencia entre la estimación de estabilidad expuesta en [Proposición 4.2 [25]], teniendo en cuenta el par (\mathbf{e}, ϵ) . En ese sentido y emulando a Verfürth en [7] [25] denotamos por Π el operador que mapea $H_0^1(\Omega)$ sobre el complemento ortogonal \mathcal{V}^\perp del espacio \mathcal{V} (cf. (1.1)) de la siguiente forma: Para cada $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$, $\Pi \mathbf{v}$ es la única solución

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla \Pi \mathbf{v} : \nabla \mathbf{w} - \int_{\Omega} \mathbf{q} \cdot \operatorname{div} \mathbf{w} &= 0 \\ \int_{\Omega} \mathbf{r} \cdot \operatorname{div} \Pi \mathbf{v} &= \int_{\Omega} \mathbf{r} \cdot \operatorname{div} \mathbf{v}. \end{aligned} \quad (5.3)$$

De esta forma se establece el cálculo de la estabilidad para el problema inicial con la segunda ecuación no homogénea. A continuación presentamos propiedades del operador Π (Operador de Stokes).

Lema 5.0.2 (Lemma 4.1 [25]). *Para cada $\mathbf{v} \in H_0^1$ se tiene que*

- (a) *Para cada $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$, $\Pi \mathbf{v}$ es cero*
- (b) $\|\nabla(\mathbf{v} - \Pi \mathbf{v})\| \leq \|\nabla \mathbf{v}\| \quad \|\nabla \Pi \mathbf{v}\| \leq \frac{1}{\beta} \|\operatorname{div} \mathbf{v}\|$
- (c) $\|\Pi \mathbf{v}\| \leq C_{\Pi} \left(\sum_{\mathcal{T} \in \mathcal{T}_h} h_{\mathcal{T}}^{2\theta} \|\operatorname{div} \mathbf{v}\|_{\mathcal{T}}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$

donde

$$\beta = \inf_{\mathbf{q} \in L_2(\Omega)} \sup_{\mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)} \frac{b(\mathbf{v}, \mathbf{q})}{\|\nabla \mathbf{v}\| \|\mathbf{q}\|}$$

es la constante $\inf - \sup$ del problema de Stokes estacionario (ver el Corolario 1.2.1 y (1.8)). El exponente θ es igual a 1 si $\mathcal{T} \cap \mathcal{U} = \emptyset$, y $\frac{1}{2}$, si $\mathcal{T} \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$, donde \mathcal{U} es un entorno fijo de una esquina no convexa de Ω .

Observación 5.0.1. Continuando con lo propuesto, primero por Bernardi y Verfürth en [7] y Verfürth en [25], en el inciso (c), se considera que existe una equivalencia afín para un elemento \mathcal{T} tal que $\int_{\Omega} q_{\mathcal{T}} \operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ para todo $q_{\mathcal{T}}$ lineal o constante.

Lema 5.0.3. Para todo $\mathbf{v} \in \mathcal{W}(0, T; H_0^1(\Omega))$ se cumple que

$$\int_{I_n} \langle \mathcal{R}, \mathbf{v} \rangle dt \lesssim \left(\sum_{i=1}^4 E_i^2 \right) \|\mathbf{v}\|_{L^2(I_n, H^1(\Omega))} + \|[\mathbf{U}^h]_{n-1}\| \|\mathbf{v}_{n-1}^+\| \quad (5.4)$$

donde

$$\begin{aligned} E_1^2 &= c_3 \left(\sum_{\mathcal{T} \in \mathcal{T}_h} h_{\mathcal{T}}^2 \int_{I_n} \|\mathbf{f} - \partial_t \mathbf{U}_n^h + \Delta \mathbf{U}_n^h - \nabla P_n^h\|_{\mathcal{T}}^2 + \sum_{E \in \mathcal{E}_{h,N}} h_E \int_{I_n} \|\mathbf{g} - \mathbf{g}_E\|_E^2 + \sum_{E \in \mathcal{E}_{h,\Omega}} \int_{I_n} h_E \|[\mathbf{g}_E]\|_E^2 \right) \\ E_2^2 &= c_{\mathcal{T}} k_n^5 \left(\max_{t \in I_n} \sum_{\mathcal{T} \in \mathcal{T}_h} \|\ddot{\mathbf{f}}\|_{\mathcal{T}}^2 + \max_{t \in I_n} \sum_{E \in \mathcal{E}_{h,N}} \|\ddot{\mathbf{g}}\|_E^2 \right) \\ E_3^2 &= \frac{1}{k_n} \|[\mathbf{U}^h]_{n-1}\|^2 \\ E_4^2 &= \frac{1}{k_n} \sum_{\mathcal{T} \in \mathcal{T}_h} h_{\mathcal{T}}^2 \|[\mathbf{U}^h]_{n-1}\|^2 \end{aligned}$$

Prueba. Integrando $\langle \mathcal{R}, \mathbf{v} \rangle$ sobre I_n con la adición y sustracción de algunos términos, obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{I_n} \langle \mathcal{R}, \mathbf{v} \rangle dt &= \int_{I_n} \left\{ \langle \mathbf{F}, \mathbf{v} \rangle - \langle \partial_t \mathbf{U}_n^h, \mathbf{v} \rangle - a(\mathbf{U}_n^h, \mathbf{v}) - b(P_n^h, \mathbf{v}) \right\} dt - \langle [\mathbf{U}^h]_{n-1}, \mathbf{v}_{n-1}^+ \rangle \\ &= \int_{I_n} \left\{ \langle \mathbf{F}, \mathbf{v} - \mathcal{I} \rangle - \langle \partial_t \mathbf{U}_n^h, \mathbf{v} - \mathcal{I} \rangle - a(\mathbf{U}_n^h, \mathbf{v} - \mathcal{I}) - b(P_n^h, \mathbf{v} - \mathcal{I}) \right\} dt \\ &\quad - \langle [\mathbf{U}^h]_{n-1}, (\mathbf{v} - \mathcal{I})_{n-1}^+ \rangle \\ &= \int_{I_n} \langle \mathbf{F}, \mathbf{v} - r_h \mathbf{v} \rangle dt + \int_{I_n} \langle \mathbf{F}, r_h \mathbf{v} - \mathcal{I} \rangle dt - \int_{I_n} \langle \partial_t \mathbf{U}_n^h, \mathbf{v} - r_h \mathbf{v} \rangle dt - \int_{I_n} \langle \partial_t \mathbf{U}_n^h, r_h \mathbf{v} - \mathcal{I} \rangle dt \\ &\quad - \int_{I_n} a(\mathbf{U}_n^h, \mathbf{v} - r_h \mathbf{v}) dt - \int_{I_n} a(\mathbf{U}_n^h, r_h \mathbf{v} - \mathcal{I}) dt - \int_{I_n} b(P_n^h, \mathbf{v} - r_h \mathbf{v}) dt \\ &\quad - \int_{I_n} b(P_n^h, r_h \mathbf{v} - \mathcal{I}) dt - \langle [\mathbf{U}^h]_{n-1}, (\mathbf{v} - \mathcal{I})_{n-1}^+ \rangle \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta el Lema 3.3.1, se afirma que

$$\int_{I_n} \langle \partial_t \mathbf{U}_n^h, r_h \mathbf{v} - \mathcal{I} \rangle dt = 0 \quad \int_{I_n} b(P_n^h, r_h \mathbf{v} - \mathcal{I}) dt = 0 \quad \int_{I_n} a(\mathbf{U}_n^h, r_h \mathbf{v} - \mathcal{I}) dt = 0$$

Entonces

$$\begin{aligned} \int_{I_n} \langle \mathcal{R}, \mathbf{v} \rangle dt &= \int_{I_n} \left\{ \langle F, \mathbf{v} - r_h \mathbf{v} \rangle - \langle \partial_t \mathbf{U}_n^h, \mathbf{v} - r_h \mathbf{v} \rangle - a(\mathbf{U}_n^h, \mathbf{v} - r_h \mathbf{v}) - b(P_n^h, \mathbf{v} - r_h \mathbf{v}) \right\} dt \\ &\quad - \langle [\mathbf{U}^h]_{n-1}, (\mathbf{v} - \mathcal{I})_{n-1}^+ \rangle + \int_{I_n} \langle F, r_h \mathbf{v} - \mathcal{I} \rangle dt \\ &:= \mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2 + \mathcal{T}_3 \end{aligned}$$

Procedemos a acorta cada termino \mathcal{T}_i con $1 \leq i \leq 3$. Para el primer termino, usamos la desigualdad de Cauchy y la estimación para el interpolador de Clément como sigue

$$\begin{aligned} &\langle F, \mathbf{v} - r_h \mathbf{v} \rangle - \langle \partial_t \mathbf{U}_n^h, \mathbf{v} - r_h \mathbf{v} \rangle - a(\mathbf{U}_n^h, \mathbf{v} - r_h \mathbf{v}) - b(P_n^h, \mathbf{v} - r_h \mathbf{v}) \\ &= \langle F, \mathbf{v} - r_h \mathbf{v} \rangle - \langle \partial_t \mathbf{U}_n^h, \mathbf{v} - r_h \mathbf{v} \rangle - \int_{\Omega} \nabla \mathbf{U}_n^h : \nabla (\mathbf{v} - r_h \mathbf{v}) + \int_{\Omega} P_n^h \operatorname{div} (\mathbf{v} - r_h \mathbf{v}) \\ &= \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} - r_h \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{g}, \mathbf{v} - r_h \mathbf{v} \rangle_{r_2} - \langle \partial_t \mathbf{U}_n^h, \mathbf{v} - r_h \mathbf{v} \rangle - \int_{\Omega} \nabla \mathbf{U}_n^h : \nabla (\mathbf{v} - r_h \mathbf{v}) + \int_{\Omega} P_n^h \operatorname{div} (\mathbf{v} - r_h \mathbf{v}) \\ &= \sum_{\mathcal{T} \in \mathcal{T}_h} \langle \mathbf{f} - \partial \mathbf{U}_n^h + \Delta \mathbf{U}_n^h - \nabla P_n^h, \mathbf{v} - r_h \mathbf{v} \rangle_{\mathcal{T}} + \sum_{E \in \mathcal{E}_{h,N}} \langle \mathbf{g} - \mathbf{g}_E, \mathbf{v} - r_h \mathbf{v} \rangle_E - \sum_{E \in \mathcal{E}_{h,\Omega}} \langle [\mathbf{g}_E], \mathbf{v} - r_h \mathbf{v} \rangle_E \\ &\leq \sum_{\mathcal{T} \in \mathcal{T}_h} c_1 h_{\mathcal{T}} \|\mathbf{f} - \partial \mathbf{U}_n^h + \Delta \mathbf{U}_n^h - \nabla P_n^h\|_{\mathcal{T}} \|\mathbf{v}\|_{1, \tilde{\omega}_{\mathcal{T}}} + \sum_{E \in \mathcal{E}_{h,N}} c_2 h_E^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{g} - \mathbf{g}_E\|_E \|\mathbf{v}\|_{1, \tilde{\omega}_E} + c_2 h_E^{\frac{1}{2}} \sum_{E \in \mathcal{E}_{h,\Omega}} \int_E \|[\mathbf{g}_E]\|_E \|\mathbf{v}\|_{1, \tilde{\omega}_{\mathcal{T}}} \\ &\leq \max\{c_1, c_2\} \left\{ \sum_{\mathcal{T} \in \mathcal{T}_h} h_{\mathcal{T}}^2 \|\mathbf{f} - \partial \mathbf{U}_n^h + \Delta \mathbf{U}_n^h - \nabla P_n^h\|_{\mathcal{T}}^2 + \sum_{E \in \mathcal{E}_{h,N}} h_E \|\mathbf{g} - \mathbf{g}_E\|_E^2 + \sum_{E \in \mathcal{E}_{h,\Omega}} h_E \|[\mathbf{g}_E]\|_E^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &\quad \left\{ \sum_{\mathcal{T} \in \mathcal{T}_h} \|\mathbf{v}\|_{\tilde{\omega}_{\mathcal{T}}}^2 + \sum_{E \in \mathcal{E}_{h,\Omega} \cup \mathcal{E}_{h,N}} \|\mathbf{v}\|_{\tilde{\omega}_E}^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &\leq c_{\mathcal{T}} \max\{c_1, c_2\} \|\mathbf{v}\|_1 \left\{ \sum_{\mathcal{T} \in \mathcal{T}_h} h_{\mathcal{T}}^2 \|\mathbf{f} - \partial \mathbf{U}_n^h + \Delta \mathbf{U}_n^h - \nabla P_n^h\|_{\mathcal{T}}^2 + \sum_{E \in \mathcal{E}_{h,N}} h_E \|\mathbf{g} - \mathbf{g}_E\|_E^2 + \sum_{E \in \mathcal{E}_{h,\Omega}} h_E \|[\mathbf{g}_E]\|_E^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

donde $\mathbf{g}_E := \frac{\partial \mathbf{U}_n^h}{\partial \mathbf{n}_E} - \mathbf{n}_E P_n^h$ y La constante $c_{\mathcal{T}}$ depende del ángulo más pequeño sobre la triangulación. Integrando sobre I_n y aplicando la desigualdad de Cauchy en el resultado anterior, logramos el acotamiento de \mathcal{T}_1

$$\mathcal{T}_1 \leq c_3 \left\{ \sum_{\mathcal{T} \in \mathcal{T}_h} h_{\mathcal{T}}^2 \int_{I_n} \|\mathbf{f} - \partial \mathbf{U}_n^h + \Delta \mathbf{U}_n^h - \nabla P_n^h\|_{\mathcal{T}}^2 + \sum_{E \in \mathcal{E}_{h,N}} h_E \int_{I_n} \|\mathbf{g} - \mathbf{g}_E\|_E^2 \right. \quad (5.5)$$

$$\left. + \sum_{E \in \mathcal{E}_{h,\Omega}} h_E \int_{I_n} \|[\mathbf{g}_E]\|_E^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{v}\|_{L^2(I_n, H^1(\Omega))} \quad (5.6)$$

Con $c_3 = c_{\mathcal{T}} \max\{c_1, c_2\}$.

A continuación examinaremos el termino \mathcal{T}_2 : La definición de la ortogonal L^2 proyección, para el caso $l=1$, conduce a la siguiente representación de \mathcal{I}

$$\mathcal{I}(\mathbf{x}, t) := \pi_1 r_h \mathbf{v} = \mathbf{v}_1(\mathbf{x}) + \frac{t - t_{n-1}}{k_n} \mathbf{v}_2(\mathbf{x})$$

donde

$$\mathbf{v}_1(\mathbf{x}) = \frac{1}{k_n} \int_{I_n} \left(4 - 6 \frac{s - t_{n-1}}{k_n} \right) r_h \mathbf{v}(\mathbf{x}, s) ds$$

$$\mathbf{v}_2(\mathbf{x}) = \frac{1}{k_n} \int_{I_n} \left(12 \frac{s - t_{n-1}}{k_n} - 6 \right) r_h \mathbf{v}(\mathbf{x}, s) ds.$$

Considerando

$$\frac{1}{k_n} \int_{I_n} \left(4 - 6 \frac{s - t_{n-1}}{k_n} \right) = \int_0^1 (4 - 6s) ds$$

obtenemos

$$\begin{aligned} (\mathcal{I} - \mathbf{v})_{n-1}^+ &= \frac{1}{k_n} \int_{I_n} \left(4 - 6 \frac{s - t_{n-1}}{k_n} \right) (r_h \mathbf{v}(s) - \mathbf{v}_{n-1}^+) ds \\ &= \frac{1}{k_n} \int_{I_n} \left(4 - 6 \frac{s - t_{n-1}}{k_n} \right) ((r_h \mathbf{v}(s) - \mathbf{v}) + (\mathbf{v} - \mathbf{v}_{n-1}^+)) ds \end{aligned} \quad (5.7)$$

Sustituyendo (5.7) en \mathcal{T}_2 resulta

$$\begin{aligned} \langle [\mathbf{U}^h]_{n-1}, (\mathcal{I} - \mathbf{v})_{n-1}^+ \rangle &= \langle [\mathbf{U}^h]_{n-1}, \frac{1}{k_n} \int_{I_n} \left(4 - 6 \frac{s - t_{n-1}}{k_n} \right) (\mathbf{v} - \mathbf{v}_{n-1}^+) ds \rangle \\ &\quad + \langle [\mathbf{U}^h]_{n-1}, \frac{1}{k_n} \int_{I_n} \left(4 - 6 \frac{s - t_{n-1}}{k_n} \right) (r_h \mathbf{v}(s) - \mathbf{v}) ds \rangle \end{aligned}$$

Aplicando, nuevamente, la desigualdad de Cauchy y los estimadores (5.1), realizamos el acotamiento de los dos términos de la derecha, de la siguiente forma

$$\begin{aligned} &\langle [\mathbf{U}^h]_{n-1}, \frac{1}{k_n} \int_{I_n} \left(4 - 6 \frac{s - t_{n-1}}{k_n} \right) (\mathbf{v} - \mathbf{v}_{n-1}^+) ds \rangle \\ &\leq \left\| [\mathbf{U}^h]_{n-1} \right\| \left\| \frac{1}{k_n} \int_{I_n} \left(4 - 6 \frac{s - t_{n-1}}{k_n} \right) (\mathbf{v} - \mathbf{v}_{n-1}^+) ds \right\| \\ &\lesssim \sum_{\mathcal{T} \in \mathcal{T}_h} \|[\mathbf{U}^h]_{n-1}\|_{\mathcal{T}} \frac{2}{\sqrt{k_n}} \|\mathbf{v} - \mathbf{v}_{n-1}^+\|_{L^2(I_n, L^2(\mathcal{T}))} \\ &\lesssim \|[\mathbf{U}^h]_{n-1}\| \left(\frac{1}{\sqrt{k_n}} \|\mathbf{v}\|_{L^2(I_n, L^2(\Omega))} + \|\mathbf{v}_{n-1}^+\| \right) \end{aligned} \quad (5.8)$$

$$\begin{aligned}
& \langle [\mathbf{U}^h]_{n-1}, \frac{1}{k_n} \int_{I_n} \left(4 - 6 \frac{s - t_{n-1}}{k_n} \right) (r_h \mathbf{v}(s) - \mathbf{v}) \, ds \rangle \\
& \leq \| [\mathbf{U}^h]_{n-1} \| \left\| \frac{1}{k_n} \int_{I_n} \left(4 - 6 \frac{s - t_{n-1}}{k_n} \right) (r_h \mathbf{v}(s) - \mathbf{v}) \, ds \right\| \\
& \leq \sum_{\mathcal{T} \in \mathcal{T}_h} \| [\mathbf{U}^h]_{n-1} \|_{\mathcal{T}} \frac{2}{\sqrt{k_n}} \| (r_h \mathbf{v} - \mathbf{v}) \|_{L^2(I_n, L^2(\mathcal{T}))} \\
& \lesssim \sum_{\mathcal{T} \in \mathcal{T}_h} \| [\mathbf{U}^h]_{n-1} \|_{\mathcal{T}} \frac{h_{\mathcal{T}}}{\sqrt{k_n}} \| \mathbf{v} \|_{L^2(I_n, L^2(\hat{\omega}_{\mathcal{T}}))} \\
& \lesssim \left(\frac{1}{k_n} \sum_{\mathcal{T} \in \mathcal{T}_h} h_{\mathcal{T}}^2 \| [\mathbf{U}^h]_{n-1} \|_{\mathcal{T}}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \| \mathbf{v} \|_{L^2(I_n, H^1(\Omega))}
\end{aligned} \tag{5.9}$$

De (5.8) y (5.9) se obtiene

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_2 &:= \langle [\mathbf{U}^h]_{n-1}, (\mathcal{I} - \mathbf{v})_{n-1}^+ \rangle \\
&\lesssim \| [\mathbf{U}^h]_{n-1} \| \left(\frac{1}{\sqrt{k_n}} \| \mathbf{v} \|_{L^2(I_n, L^2(\Omega))} + \| \mathbf{v}_{n-1}^+ \| \right) \\
&\quad + \left(\frac{1}{k_n} \sum_{\mathcal{T} \in \mathcal{T}_h} h_{\mathcal{T}}^2 \| [\mathbf{U}^h]_{n-1} \|_{\mathcal{T}}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \| \mathbf{v} \|_{L^2(I_n, H^1(\Omega))}
\end{aligned} \tag{5.10}$$

Y por último, acotamos el termino

$$\mathcal{T}_3 := \int_{I_n} \langle \mathbf{f}, r_h \mathbf{v} - \mathcal{I} \rangle dt = \int_{I_n} \langle \mathbf{f}, r_h \mathbf{v} - \mathcal{I} \rangle dt + \int_{I_n} \langle \mathbf{g}, r_h \mathbf{v} - \mathcal{I} \rangle dt.$$

Para tal objetivo, definimos el interpolador lineal de las funciones \mathbf{f} y \mathbf{g} en el intervalo I_n como:

$$\hat{\mathbf{f}} = \mathbf{f}_{n-1}^+ + \frac{t - t_{n-1}}{k_n} (\mathbf{f}_n^- - \mathbf{f}_{n-1}^+) \quad \hat{\mathbf{g}} = \mathbf{g}_{n-1}^+ + \frac{t - t_{n-1}}{k_n} (\mathbf{g}_n^- - \mathbf{g}_{n-1}^+)$$

Ahora, bajo el error de interpolación polinomial se afirma que

$$\mathbf{f} - \hat{\mathbf{f}} = \frac{\ddot{\mathbf{f}}(\zeta, \mathbf{x})}{2} (t - t_{n-1})(t - t_n),$$

para todo $\xi \in I_n$. Dado el Lema 3.3.1, podemos afirmar que

$$\int_{I_n} \langle \hat{\mathbf{f}}, r_h \mathbf{v} - \mathcal{I} \rangle dt = 0 \quad \int_{I_n} \langle \hat{\mathbf{g}}, r_h \mathbf{v} - \mathcal{I} \rangle_{\Gamma_2} dt = 0$$

Por lo tanto, aplicando la desigualdad de Cauchy en el espacio y tiempo junto con (5.1c), el primer término presenta las siguiente estimación

$$\begin{aligned}
\int_{I_n} \langle \mathbf{f}, r_h \mathbf{v} - \mathcal{I} \rangle dt &= \int_{I_n} \langle \mathbf{f} - \hat{\mathbf{f}}, r_h \mathbf{v} - \mathcal{I} \rangle dt \\
&\lesssim \int_{I_n} |(t - t_{n-1})(t - t_n)| \|\ddot{\mathbf{f}}\| \|r_h \mathbf{v} - \mathcal{I}\| dt \\
&\lesssim k_n^2 \|\ddot{\mathbf{f}}\|_{L^2(I_n, L^2(\Omega))} \|r_h \mathbf{v} - \mathcal{I}\|_{L^2(I_n, L^2(\Omega))} dt \\
&\lesssim k_n^{\frac{5}{2}} \max_{t \in I_n} \|\ddot{\mathbf{f}}\| \|r_h \mathbf{v}\|_{L^2(I_n, L^2(\Omega))} dt \\
&\lesssim k_n^{\frac{5}{2}} \max_{t \in I_n} \sum_{\mathcal{T} \in \mathcal{T}_h} \|\ddot{\mathbf{f}}\|_{\mathcal{T}} \|\mathbf{v}\|_{L^2(I_n, H^1(\hat{\omega}_{\mathcal{T}}))} dt
\end{aligned}$$

Aplicando un proceso similar para el término $\int_{I_n} \langle \mathbf{g}, r_h \mathbf{v} - \mathcal{I} \rangle_{\Gamma} dt$, concluimos que

$$\mathcal{T}_3 \lesssim c_{\mathcal{T}} k_n^{\frac{5}{2}} \left\{ \max_{t \in I_n} \sum_{\mathcal{T} \in \mathcal{T}_h} \|\ddot{\mathbf{f}}\|_{\mathcal{T}}^2 + \max_{t \in I_n} \sum_{E \in \mathcal{E}_{h,N}} \|\ddot{\mathbf{g}}\|_E^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{v}\|_{L^2(I_n, H^1(\Omega))} \quad (5.11)$$

Finalmente, mediante 5.5, 5.10 y 5.11 se obtiene la desigualdad 5.4. ■

A continuación, en primer lugar, establecemos una estimación del error de la velocidad en función del residual establecido, en los espacio $L^2(\Omega)$ y $L^p(I_n, H_0^1(\Omega))$ para \mathbf{e}_n^- y \mathbf{e} , respectivamente. Seguidamente, establecemos una estimación del error de la presión y la derivada en el tiempo de la velocidad, en función del estimador del error de velocidad. El resultado puede ser indicado como sigue.

Lema 5.0.4. Sea $\mathbf{e} := \mathbf{u} - \mathbf{U}_n^h$, donde \mathbf{u} y \mathbf{U}_n^h son las funciones velocidad establecidas en (2.3) y (4.2) respectivamente. Entonces tenemos

$$\begin{aligned} \|\mathbf{e}_n^-\|^2 + \|\mathbf{e}\|_{L^2(I_n, H^1(\Omega))}^2 &\lesssim 10 \left(\sum_{i=1}^4 E_i^2 \right)^2 + 6 \|[\mathbf{U}^h]_{n-1}\|^2 + \|\Pi \mathbf{U}_n^h\|_{L^2(I_n, H^1(\Omega))}^2 \\ &+ 14 \|\Pi \mathbf{U}_n^h\|_{L^\infty(I_n, L^2(\Omega))}^2 + 6 \|\partial_t \Pi \mathbf{U}_n^h\|_{L^2(I_n, L^2(\Omega))}^2 + \frac{6}{\beta} \|\operatorname{div} \mathbf{U}_n^h\|_{L^2(I_n, L^2(\Omega))}^2 + 6 \|\mathbf{e}_{n-1}^-\|^2 \end{aligned} \quad (5.12)$$

para todo $t \in I_n$

Prueba. Observando que $\operatorname{div}(\mathbf{e} - \Pi \mathbf{e}) = 0$. Insertamos $\mathbf{e} - \Pi \mathbf{e}$ como \mathbf{v} en 5.2 e integramos sobre I_n

$$\begin{aligned} \int_{I_n} \{ \langle \partial_t \mathbf{e}, \mathbf{e} \rangle + \alpha(\mathbf{e}, \mathbf{e}) \} dt + \langle [\mathbf{e}]_{n-1}, \mathbf{e}_{n-1}^+ \rangle \\ = \langle \mathcal{R}, \mathbf{e} \rangle - \langle \mathcal{R}, \Pi \mathbf{e} \rangle + \int_{I_n} \{ \langle \partial_t \mathbf{e}, \Pi \mathbf{e} \rangle + \alpha(\mathbf{e}, \Pi \mathbf{e}) \} dt + \langle [\mathbf{e}]_{n-1}, \Pi \mathbf{e}_{n-1}^+ \rangle \end{aligned} \quad (5.13)$$

De las identidades

$$\begin{aligned} \int_{I_n} \langle \partial_t \mathbf{e}, \mathbf{e} \rangle dt &= \frac{1}{2} \|\mathbf{e}_n^-\|^2 - \frac{1}{2} \|\mathbf{e}_{n-1}^+\|^2 \\ \langle [\mathbf{e}]_{n-1}, \mathbf{e}_{n-1}^+ \rangle &= \frac{1}{2} \|\mathbf{e}_{n-1}^+\|^2 + \frac{1}{2} \|[\mathbf{e}]_{n-1}\|^2 - \frac{1}{2} \|\mathbf{e}_{n-1}^-\|^2 \end{aligned}$$

y del hecho que $\alpha(\cdot, \cdot)$ es coersive, resulta

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|\mathbf{e}_n^-\|^2 + \frac{1}{2} \|[\mathbf{e}]_{n-1}\|^2 - \frac{1}{2} \|\mathbf{e}_{n-1}^-\|^2 + \|\mathbf{e}\|_{L^2(I_n, H^1(\Omega))}^2 \\ \leq \int_{I_n} \{ \langle \partial_t \mathbf{e}, \mathbf{e} \rangle + \alpha(\mathbf{e}, \mathbf{e}) \} dt + \langle [\mathbf{e}]_{n-1}, \mathbf{e}_{n-1}^+ \rangle \end{aligned} \quad (5.14)$$

Combinando 5.13 y 5.14, se deduce

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|\mathbf{e}_n^-\|^2 + \frac{1}{2} \|[\mathbf{e}]_{n-1}\|^2 - \frac{1}{2} \|\mathbf{e}_{n-1}^-\|^2 + \|\mathbf{e}\|_{L^2(I_n, H^1(\Omega))}^2 \\ \leq \langle \mathcal{R}, \mathbf{e} \rangle - \langle \mathcal{R}, \Pi \mathbf{e} \rangle + \int_{I_n} \{ \langle \partial_t \mathbf{e}, \Pi \mathbf{e} \rangle + \alpha(\mathbf{e}, \Pi \mathbf{e}) \} dt + \langle [\mathbf{e}]_{n-1}, \Pi \mathbf{e}_{n-1}^+ \rangle \\ = \langle \mathcal{R}, \mathbf{e} \rangle + \langle \mathcal{R}, \Pi \mathbf{U}_n^h \rangle + \int_{I_n} \{ \langle \partial_t \mathbf{e}, \Pi \mathbf{e} \rangle + \alpha(\mathbf{e}, \Pi \mathbf{e}) \} dt + \langle [\mathbf{e}]_{n-1}, \Pi \mathbf{e}_{n-1}^+ \rangle \end{aligned}$$

Aplicando el Lema 5.0.2 y usando la desigualdad de Cauchy, resulta

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}\|\mathbf{e}_n^-\|^2 + \frac{1}{2}\|[\mathbf{e}]_{n-1}\|^2 - \frac{1}{2}\|\mathbf{e}_{n-1}^-\|^2 + \|\mathbf{e}\|_{L^2(I_n, H^1(\Omega))}^2 \\
& \leq \langle \mathcal{R}, \mathbf{e} \rangle + \langle \mathcal{R}, \Pi \mathbf{U}_n^h \rangle + \int_{I_n} \langle \partial_t \mathbf{e}, \Pi \mathbf{e} \rangle dt + \int_{I_n} \|\nabla \mathbf{e}\| \|\nabla \Pi \mathbf{e}\| dt + \|[\mathbf{U}_n^h]_{n-1}\| \|\Pi \mathbf{e}_{n-1}^+\| \\
& \leq \langle \mathcal{R}, \mathbf{e} \rangle + \langle \mathcal{R}, \Pi \mathbf{U}_n^h \rangle + \int_{I_n} \langle \partial_t \mathbf{e}, \Pi \mathbf{e} \rangle dt + \|\mathbf{e}\|_{L^2(I_n, H^1(\Omega))} \frac{1}{\beta} \|\operatorname{div} \mathbf{U}_n^h\|_{L^2(I_n, L^2(\Omega))} \\
& \quad + \|[\mathbf{U}_n^h]_{n-1}\| \|\Pi \mathbf{e}_{n-1}^+\|
\end{aligned} \tag{5.15}$$

Ahora sí integramos por parte el termino $\int_{I_n} \langle \partial_t \mathbf{e}, \Pi \mathbf{e} \rangle$ y le aplicamos la desigualdad Young (ver Lema 1.3.1) con un apropiado ε , implica que

$$\begin{aligned}
\int_{I_n} \langle \partial_t \mathbf{e}, \Pi \mathbf{e} \rangle dt &= \langle \mathbf{e}_n^-, \Pi \mathbf{e}_n^- \rangle - \langle \mathbf{e}_{n-1}^+, \Pi \mathbf{e}_{n-1}^+ \rangle - \int_{I_n} \langle \mathbf{e}, \partial_t \Pi \mathbf{e} \rangle dt \\
&= \langle \mathbf{e}_n^-, \Pi \mathbf{U}_n^{h-} \rangle + \langle \mathbf{e}_{n-1}^+, \Pi \mathbf{U}_{n-1}^{h+} \rangle + \int_{I_n} \langle \mathbf{e}, \partial_t \Pi \mathbf{U}_n^h \rangle dt \\
&\leq \|\mathbf{e}_n^-\| \|\Pi \mathbf{U}_n^{h-}\| + \|\mathbf{e}_{n-1}^+\| \|\Pi \mathbf{U}_{n-1}^{h+}\| + \int_{I_n} \|\mathbf{e}\| \|\partial_t \Pi \mathbf{U}_n^h\| dt \\
&\leq \frac{1}{4}\|\mathbf{e}_n^-\|^2 + \|\Pi \mathbf{U}_n^{h-}\|^2 + \frac{1}{2}\|\mathbf{e}_{n-1}^+\|^2 + \frac{1}{2}\|\Pi \mathbf{U}_{n-1}^{h+}\|^2 + \|\mathbf{e}\|_{L^2(I_n, H^1(\Omega))} \|\partial_t \Pi \mathbf{U}_n^h\|_{L^2(I_n, L^2(\Omega))} \\
&\leq \frac{1}{4}\|\mathbf{e}_n^-\|^2 + \frac{1}{2}\|\mathbf{e}_{n-1}^+\|^2 + \frac{3}{2}\|\Pi \mathbf{U}_n^h\|_{L^\infty(I_n, L^2(\Omega))}^2 + \|\mathbf{e}\|_{L^2(I_n, H^1(\Omega))} \|\partial_t \Pi \mathbf{U}_n^h\|_{L^2(I_n, L^2(\Omega))}
\end{aligned} \tag{5.16}$$

De (5.15) , (5.16) y el Lema 5.0.3 se concluye que

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}\|\mathbf{e}_n^-\|^2 + \frac{1}{2}\|[\mathbf{e}]_{n-1}\|^2 - \frac{1}{2}\|\mathbf{e}_{n-1}^-\|^2 + \|\mathbf{e}\|_{L^2(I_n, H^1(\Omega))}^2 \\
& \lesssim \left(\sum_{i=1}^4 E_i^2 \right) \|\mathbf{e}\|_{L^2(I_n, H^1(\Omega))} + \|[\mathbf{U}_n^h]_{n-1}\| \|\mathbf{e}_{n-1}^+\| \\
& \quad + \left(\sum_{i=1}^4 E_i^2 \right) \|\Pi \mathbf{U}_n^h\|_{L^2(I_n, H^1(\Omega))} + \|[\Pi \mathbf{U}_n^h]_{n-1}\| \|\mathbf{U}_{n-1}^{h+}\| \\
& \quad + \frac{1}{4}\|\mathbf{e}_n^-\|^2 + \frac{1}{2}\|\mathbf{e}_{n-1}^+\|^2 + \frac{3}{2}\|\Pi \mathbf{U}_n^h\|_{L^\infty(I_n, L^2(\Omega))}^2 + \|\mathbf{e}\|_{L^2(I_n, H^1(\Omega))} \|\partial_t \Pi \mathbf{U}_n^h\|_{L^2(I_n, L^2(\Omega))} \\
& \quad + \|\mathbf{e}\|_{L^2(I_n, H^1(\Omega))} \frac{1}{\beta} \|\operatorname{div} \mathbf{U}_n^h\|_{L^2(I_n, L^2(\Omega))} + \|[\mathbf{U}_n^h]_{n-1}\| \|\Pi \mathbf{U}_{n-1}^{h+}\|
\end{aligned}$$

Aplicamos nuevamente la desigualdad de Young y sumando los términos semejantes

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}\|\mathbf{e}_n^-\|^2 + \frac{1}{2}\|[\mathbf{e}]_{n-1}\|^2 - \frac{1}{2}\|\mathbf{e}_{n-1}^-\|^2 + \|\mathbf{e}\|_{L^2(I_n, H^1(\Omega))}^2 \\
& \lesssim \frac{3}{2}\left(\sum_{i=1}^4 E_i^2\right)^2 + \frac{1}{6}\|\mathbf{e}\|_{L^2(I_n, H^1(\Omega))}^2 + \frac{1}{2}\|[\mathbf{U}_n^h]_{n-1}\|^2 + \frac{1}{2}\|\mathbf{e}_{n-1}^+\|^2 + \left(\sum_{i=1}^4 E_i^2\right)^2 \\
& + \frac{1}{4}\|\Pi\mathbf{U}_n^h\|_{L^2(I_n, H^1(\Omega))}^2 + \frac{1}{4}\|[\mathbf{U}_n^h]_{n-1}\|^2 + \|\Pi\mathbf{U}_{n-1}^+\|^2 + \frac{1}{4}\|\mathbf{e}_n^-\|^2 + \frac{1}{2}\|\mathbf{e}_{n-1}^+\|^2 + \frac{3}{2}\|\Pi\mathbf{U}_n^h\|_{L^\infty(I_n, L^2(\Omega))}^2 \\
& + \frac{1}{6}\|\mathbf{e}\|_{L^2(I_n, H^1(\Omega))}^2 + \frac{3}{2}\|\partial_t \Pi\mathbf{U}_n^h\|_{L^2(I_n, L^2(\Omega))}^2 + \frac{1}{6}\|\mathbf{e}\|_{L^2(I_n, H^1(\Omega))}^2 + \frac{3}{2\beta}\|\operatorname{div} \mathbf{U}_n^h\|_{L^2(I_n, L^2(\Omega))}^2 \\
& + \frac{1}{4}\|[\mathbf{U}_n^h]_{n-1}\|^2 + \|\Pi\mathbf{U}_{n-1}^+\|^2 \\
& \lesssim \frac{5}{2}\left(\sum_{i=1}^4 E_i^2\right)^2 + \frac{1}{2}\|\mathbf{e}\|_{L^2(I_n, H^1(\Omega))}^2 + \|\mathbf{e}_{n-1}^+\|^2 + \|[\mathbf{U}_n^h]_{n-1}\|^2 + \frac{1}{4}\|\Pi\mathbf{U}_n^h\|_{L^2(I_n, H^1(\Omega))}^2 \\
& + \frac{7}{2}\|\Pi\mathbf{U}_n^h\|_{L^\infty(I_n, L^2(\Omega))}^2 + \frac{3}{2}\|\partial_t \Pi\mathbf{U}_n^h\|_{L^2(I_n, L^2(\Omega))}^2 + \frac{1}{4}\|\mathbf{e}_n^-\|^2 + \frac{3}{2\beta}\|\operatorname{div} \mathbf{U}_n^h\|_{L^2(I_n, L^2(\Omega))}^2
\end{aligned}$$

Multiplicando por 2 y dado que $\|\mathbf{e}_{n-1}^+\| \leq \|\mathbf{e}_{n-1}^-\| + \|[\mathbf{e}]_{n-1}\|$, tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\|\mathbf{e}_n^-\|^2 + \|\mathbf{e}\|_{L^2(I_n, H^1(\Omega))}^2 & \lesssim 5\left(\sum_{i=1}^4 E_i^2\right)^2 + 3\|[\mathbf{U}_n^h]_{n-1}\|^2 + \frac{1}{2}\|\Pi\mathbf{U}_n^h\|_{L^2(I_n, H^1(\Omega))}^2 \\
& + 7\|\Pi\mathbf{U}_n^h\|_{L^\infty(I_n, L^2(\Omega))}^2 + 3\|\partial_t \Pi\mathbf{U}_n^h\|_{L^2(I_n, L^2(\Omega))}^2 + 3\|\mathbf{e}_{n-1}^-\|^2 + \frac{3}{\beta}\|\operatorname{div} \mathbf{U}_n^h\|_{L^2(I_n, L^2(\Omega))}^2
\end{aligned} \tag{5.17}$$

■

Lema 5.0.5. *Para todo $t \in I_n$ se tiene que*

$$\begin{aligned}
\|\partial_t \mathbf{e} + \nabla \epsilon\|_{L^2(I_n, H^1(\Omega))} & \lesssim 22\left(\sum_{i=1}^4 E_i^2\right)^2 + 12\|[\mathbf{U}_n^h]_{n-1}\|^2 + 2\|\Pi\mathbf{U}_n^h\|_{L^2(I_n, H^1(\Omega))}^2 \\
& + 28\|\Pi\mathbf{U}_n^h\|_{L^\infty(I_n, L^2(\Omega))}^2 + 12\|\partial_t \Pi\mathbf{U}_n^h\|_{L^2(I_n, L^2(\Omega))}^2 + \frac{12}{\beta}\|\operatorname{div} \mathbf{U}_n^h\|_{L^2(I_n, L^2(\Omega))}^2 + 12\|\mathbf{e}_{n-1}^-\|^2
\end{aligned} \tag{5.18}$$

Prueba. Considerando 5.2 y el interpolador r_h , entonces, para un t específico se cumple que

$$\begin{aligned}
\langle \partial_t \mathbf{e} + \nabla \epsilon, \mathbf{v} \rangle & = \langle \mathbf{F}, \mathbf{v} \rangle - \langle \partial_t \mathbf{U}_n^h, \mathbf{v} \rangle - a(\mathbf{U}_n^h, \mathbf{v}) - b(P_n^h, \mathbf{v}) - a(\mathbf{e}, \mathbf{v}) \\
& = \langle \mathbf{F}, \mathbf{v} - r_h \mathbf{v} \rangle - \langle \partial_t \mathbf{U}_n^h, \mathbf{v} - r_h \mathbf{v} \rangle - a(\mathbf{U}_n^h, \mathbf{v} - r_h \mathbf{v}) - b(P_n^h, \mathbf{v} - r_h \mathbf{v}) - a(\mathbf{e}, \mathbf{v}) \\
& \leq \|\mathbf{v}\|_{H^1(\Omega)} \{ (E_1^2)^2 + \|\nabla \mathbf{e}\| \}
\end{aligned}$$

Lo anterior junto con la definición de la norma del dual de $H^1(\Omega)$, integrando sobre I_n y el cuadrado de la norma, implica que

$$\|\partial_t \mathbf{e} + \epsilon\|_{L^2(I_n, H_0^{-1}(\Omega))}^2 \leq 2\|\mathbf{e}\|_{L^2(I_n, H^1(\Omega))}^2 + 2(E_1^2)^2$$

Dado la estimación (5.12), se demuestra 5.0.5. ■

Teorema 5.1. *Sean (\mathbf{u}, p) son las funciones solución de (2.3) y (\mathbf{U}_n^h, P_n^h) aproximaciones de elementos finitos en (4.2). Consideramos $\mathbf{e} := \mathbf{u} - \mathbf{U}_n^h$ y $\epsilon := p - P_n^h$, para todo $t \in I_n := [t_{n-1}, t_n]$. Entonces, el error puede estar delimitado desde arriba por*

$$\left\{ \|\mathbf{e}_n^-\|^2 + \|\mathbf{e}\|_{L^2(I_n, H^1(\Omega))}^2 + \|\partial_t \mathbf{e} + \nabla \epsilon\|_{L^2(I_n, H^{-1}(\Omega))}^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \lesssim C_{\sharp} \left\{ \sum_{i=1}^7 \mathcal{R}_i + \mathcal{R}_8 + \|\mathbf{e}_{n-1}^-\|^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

donde

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_1^2 &:= k_n \left(\max_{t \in I_n} \sum_{\mathcal{T} \in \mathcal{T}_h} h_{\mathcal{T}}^2 \|\mathbf{f} - \partial \mathbf{U}_n^h + \Delta \mathbf{U}_n^h - \nabla P_n^h\|_{\mathcal{T}}^2 + \max_{t \in I_n} \sum_{E \in \mathcal{E}_{h,N}} h_E \|\mathbf{g} - \mathbf{g}_E\|_E^2 + \max_{t \in I_n} \sum_{E \in \mathcal{E}_{h,\Omega}} h_E \|[\mathbf{g}]_E\|_E^2 \right) \\ \mathcal{R}_2^2 &:= k_n^2 \max_{t \in I_n} \sum_{\mathcal{T} \in \mathcal{T}_h} \|\operatorname{div} \mathbf{U}_n^h\|^4 \\ \mathcal{R}_3^2 &:= k_n \max_{t \in I_n} \sum_{\mathcal{T} \in \mathcal{T}_h} h_{\mathcal{T}}^{2\alpha} \|\operatorname{div} \mathbf{U}_n^h(\cdot, t)\|_{\mathcal{T}}^2 \\ \mathcal{R}_4^2 &:= k_n \max_{t \in I_n} \sum_{\mathcal{T} \in \mathcal{T}_h} h_{\mathcal{T}}^{2\alpha} \|\operatorname{div} \partial_t \mathbf{U}_n^h\|_{\mathcal{T}}^2 \\ \mathcal{R}_5^2 &:= k_n^{-1} \sum_{\mathcal{T} \in \mathcal{T}_h} h_{\mathcal{T}}^2 \|[\mathbf{U}^h]_{n-1}\|_{\mathcal{T}}^2 \\ \mathcal{R}_6^2 &:= k_n^5 \left(\max_{t \in I_n} \sum_{\mathcal{T} \in \mathcal{T}_h} \|\ddot{\mathbf{f}}\|_{\mathcal{T}}^2 + \max_{t \in I_n} \sum_{E \in \mathcal{E}_{h,N}} \|\ddot{\mathbf{g}}\|_E^2 \right) \\ \mathcal{R}_7^2 &:= k_n^{-1} \|[\mathbf{U}^h]_{n-1}\|^2 \\ \mathcal{R}_8 &:= \|[\mathbf{U}^h]_{n-1}\|^2 \end{aligned}$$

La constante C_{\sharp} dependerá de las constantes β y C_{Π} del Lema 5.0.2, del parámetro $c_{\mathcal{T}}$ ángulo más pequeños sobre la triangulación y las constantes c_1 y c_2 de (5.1)

Prueba. La demostración del teorema se sigue inmediatamente de los lemas 5.0.5, 5.0.4 y ■

5.1 Procedimiento Adaptativo

Basados en disminuir el tiempo que conlleva un refinamiento general o un nuevo remallado, contemplando el mejoramiento de la aproximación, se emplea un procedimiento por regiones considerando los indicadores locales para determinar cuales elementos presentan menos indice de tolerancia.

Un método frecuentemente usado de adaptación local, es el llamado, Rojo-Azul-Verde que emplea una técnica de refinamiento jerárquico. Es decir, un triángulo a ser refinado se divide en cuatro subtriángulo, de la siguiente forma: En las intersecciones de los bordes del triángulo, se insertan nuevos puntos. De esta manera se generan cuatro triángulos, cuyos bordes están conectados en esos puntos. Estos nuevos triángulos se llaman rojos.

Una propiedad de este método es que todos los nuevos triángulos son geométrica-mente similar a la original y así la calidad de elemento de los nuevos triángulos es la misma que la calidad de la original. Este procedimiento afecta los elementos vecinos, del triangulo refinado, dotándolos de puntos extras. los elementos vecinos deben refinarse de modo conveniente, lo cuales pueden ser llamados verdes, azules o en algunos casos nuevamente rojos. Un refinamiento Verde sólo se realiza si se inserta un solo punto en lado mas largo del elemento vecino y Azul si se da en alguno de lo dos restantes. Si se insertan más puntos, el elemento vecino será rojo también.

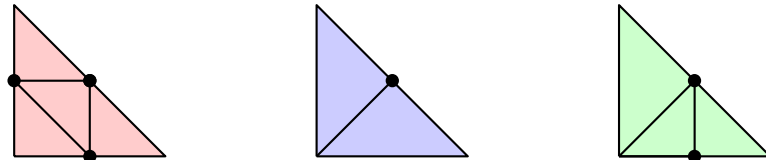


Figura 5.1: Refinamiento Rojo, Azul y Verde de un elemento \mathcal{T}

Definición 5.1. [10, Def. 7.1]

(i) Un refinamiento rojo de $\mathcal{T} \in \mathcal{T}_h$ se realiza dividiendo \mathcal{T} en cuatro sub-triángulos congruentes que se obtienen mediante la conexión de los puntos medios de $E \in \mathcal{E}(\mathcal{T})$. Ver figura 5.1.

(ii) Un refinamiento azul de $\mathcal{T} \in \mathcal{T}_h$ se realiza dividiendo \mathcal{T} en tres sub-triángulos que se obtienen mediante la conexión del punto medio del lado más largo $E_1 \in \mathcal{E}(\mathcal{T})$ con el punto del otro lado $E_2 \in \mathcal{E}(\mathcal{T}) \setminus E_1$ y el nodo opuesto. Ver figura 5.1.

(iii) Un refinamiento verde de $\mathcal{T} \in \mathcal{T}_h$ se realiza dividiendo \mathcal{T} en dos sub-triángulos que se obtienen mediante la conexión del punto medio del borde más largo $E_1 \in \mathcal{E}(\mathcal{T})$ con el nodo opuesto a ella. Ver figura 5.1.

Dados los estimadores de error globales \mathcal{R}_i , derivamos los indicadores locales $\eta_{i,n}$ de error, para cada $\mathcal{T} \in \mathcal{T}_h$ en el n -intervalo de tiempo:

$$\begin{aligned}\eta_{1,n}^2 &:= k_n \sum_{i=1}^3 \tilde{\eta}_i \\ \eta_{2,n}^2 &:= k_n^2 \max_{t \in I_n} \|\operatorname{div} \mathbf{U}_n^h\|_{\mathcal{T}}^4 \\ \eta_{3,n}^2 &:= k_n \max_{t \in I_n} h_{\mathcal{T}}^2 \|\operatorname{div} \mathbf{U}_n^h(\cdot, t)\|_{\mathcal{T}}^2 \\ \eta_{4,n}^2 &:= k_n \max_{t \in I_n} h_{\mathcal{T}}^2 \|\operatorname{div} \partial_t \mathbf{U}_n^h\|_{\mathcal{T}}^2 \\ \eta_{5,n}^2 &:= k_n^{-1} h_{\mathcal{T}}^2 \|[\mathbf{U}^h]_{n-1}\|_{\mathcal{T}}^2\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}\tilde{\eta}_1 &:= \max_{t \in I_n} h_{\mathcal{T}}^2 \|\mathbf{f} - \partial \mathbf{U}_n^h \Delta \mathbf{U}_n^h - \nabla P_n^h\|_{\mathcal{T}}^2 \\ \tilde{\eta}_2 &:= \max_{t \in I_n} \sum_{E \in \mathcal{E}(\mathcal{T}) \cap \mathcal{E}_{h,N}} h_E \|\mathbf{g} - \mathbf{g}_E\|_E^2 \\ \tilde{\eta}_3 &:= \max_{t \in I_n} \sum_{E \in \mathcal{E}(\mathcal{T}) \cap \mathcal{E}_{h,\Omega}} h_E \|[\mathbf{g}]_E\|_E^2\end{aligned}$$

El tamaño de malla local y la longitud de los pasos de tiempo están determinados por el siguiente algoritmo de realimentación adaptativo. Los resultados correspondientes se presentan en el Capítulo 6.

Algoritmo 1 Adaptativo

Require: Indicar mallado inicial \mathcal{T}_h^0 , tolerancia $\vartheta > 0$ y porcentaje de elementos refinados denotados por $\delta \in [0, 1]$.

- 1: Comience con \mathcal{T}_h^0 en el paso de tiempo k_1
- 2: **Para** $n = 1, 2, \dots$
- 3: Calcular las soluciones Galerkin (\mathbf{U}^h, P_n^h) del esquema discreto en el intervalo de tiempo $]t_{n-1}, t_n]$
- 4: Calcule el indicador local $\eta_{i,n}$, $i = 1, \dots, 5$ para cada $\mathcal{T} \in \mathcal{T}_h$

$$\eta^n(\mathcal{T}) := \sum_{i=1}^5 \eta_{i,n}(\mathcal{T})$$

$$\eta_{\max}^n := \max_{\mathcal{T}' \in \mathcal{T}_h} (\mathcal{T}')$$

- 5: Realice una refinamiento de tipo rojo donde $\delta \cdot \eta_{\max}^n \leq \eta^n(\mathcal{T})$
- 6: Realice refinamiento rojo, azul o verde para evitar nodos sueltos.
- 7: Si

$$\eta_n^T := \sum_{i=1}^5 \left(\sum_{\mathcal{T} \in \mathcal{T}_h^{k+1}} \eta_{i,n}(\mathcal{T}) \right) \leq \vartheta$$

continúe. De lo contrario regrese a y repita la secuencia

- 8: Elija un k_{n+1} tal que

$$\left(\frac{k_{n+1}}{k_n} \right)^{\frac{5}{2}} (\mathcal{R}_6^2 + \mathcal{R}_7^2) = \eta_n^T$$

Pare si $t_{n+1} = t_n + k_{n+1}$

Capítulo 6

Resultados numérico

En este capítulo presentamos experimentos numéricos en los cuales se aplica el método adaptativo propuesto, considerando problemas con soluciones conocidas que nos permite calcular el error cometido tanto para la velocidad como para la presión. De igual forma, estudiamos la consistencia de los estimador que hemos introducido en el capítulo previo. Para calcular la solución del problema discreto (4.10) obtenido por el método de Galerkin discontinuas proponemos una partición de longitud uniforme $k = 0.1$ sobre $]0, 3.2]$ en subintervalos, y de esa forma, demostrar que la matriz (4.10) es independiente a la elección del subintervalo. Para la discretización en el espacio, sin adaptativo, variando la malla de tal forma que el diámetro máximo sea $h = \frac{1}{M}$ con $M = 1, 2, 4, 8, 16$. Ver grafica (6.1). Todo procedimiento bajo la implementación del programa que hemos desarrollado mediante el lenguaje de Matlab.

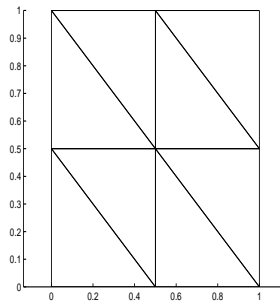


Figura 6.1: Mallado inicial uniforme del dominio $(0,1)^2$, utilizado en el Ejemplo 6.1.

Denotamos por e_1 e_2 y e_3 los siguientes errores de aproximación

$$e_1 = \|\mathbf{e}_n^-\|$$

$$e_2 = \|\mathbf{e}\|_{L^2(I_n, H^1(\Omega))}$$

$$e_3 = \|\partial_t \mathbf{e} + \epsilon\|_{L^2(I_n, H^{-1}(\Omega))}$$

Ejemplo 6.1. Sea $\Omega := (0, 1)^2 \subseteq \mathbb{R}^2$, consideramos las siguientes funciones

$$\mathbf{u}(t, \mathbf{x}) = \sin t \begin{pmatrix} 2x^2(1-x)^2y(1-y)(2y-1) \\ 2y^2(1-y)^2x(1-x)(1-2x) \end{pmatrix} \quad (6.1)$$

$$p(t, \mathbf{x}) = xy(x-1)(y-1) \quad (6.2)$$

como las soluciones exactas del sistema (2.1). Por lo tanto, el lado derecho consiste en la función

$$\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) = \cos t \begin{pmatrix} 2x^2(1-x)^2y(1-y)(2y-1) \\ 2y^2(1-y)^2x(1-x)(1-2x) \end{pmatrix} + \sin t \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{pmatrix} \quad (6.3)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1 &= 5y - 12x^2 - 13y^2 - 26xy + 48x^2y + 74x^2y^2 \\ &\quad - 48xy^3 + 48x^2y^3 - 48x^3y + 24x^4y + 8y^3 + 24x^3 - 12x^4 \\ \mathbf{x}_2 &= -3x + 11x^2 + 12y^2 + 22xy - 70x^2y - 48xy^2 + 72x^2y^2 \\ &\quad + 48xy^3 - 48x^3y^2 + 48^3y - 24y^4x - 24y^3 + 12y^4 - 8x^3 \end{aligned}$$

Al establecer el dominio inicial Ω , en este ejemplo se obtienen condiciones de Dirichet homogéneas. Las siguientes tablas muestra el comportamiento de los errores mediante las normas establecidas con relación a los grados de libertad (DOF), sin la aplicación de algoritmo adaptativo. Se observa que a medida que aumenta el número de elementos en la malla con lo cual aumenta también el número de nodos de velocidad y el número de nodos de presión, disminuye el error en la aproximación numérica como se esperaba. Con respecto a la tasa de convergencia (RC) se muestra que la norma e_1 es de orden 3 y e_2 junto a e_3 es de orden 2.

Intervalo de tiempo 1					
DOF	50	162	578	2178	8450
e_1	$2.7141e - 04$	$4.4294e - 05$	$4.7726e - 06$	$5.7387e - 07$	$1.8590e - 07$
RC_1		$3.0841e + 00$	$3.5031e + 00$	$3.1935e + 00$	$1.6628e + 00$
e_2	$3.5467e - 03$	$1.2094e - 03$	$2.8579e - 04$	$6.8610e - 05$	$1.6884e - 05$
RC_2		$1.8305e + 00$	$2.2683e + 00$	$2.1511e + 00$	$2.0683e + 00$
e_3	$6.2518e - 03$	$1.7871e - 03$	$4.5086e - 04$	$1.1279e - 04$	$2.8194e - 05$
RC_3		$2.1305e + 00$	$2.1654e + 00$	$2.0890e + 00$	$2.0452e + 00$

Tabla 6.1: Comportamiento del error cuando h tiende a cero en el intervalo $(0, 0.1]$

La figura 6.2 mostrada a continuación ilustran las soluciones numéricas para el ultimo refinamiento de la malla.

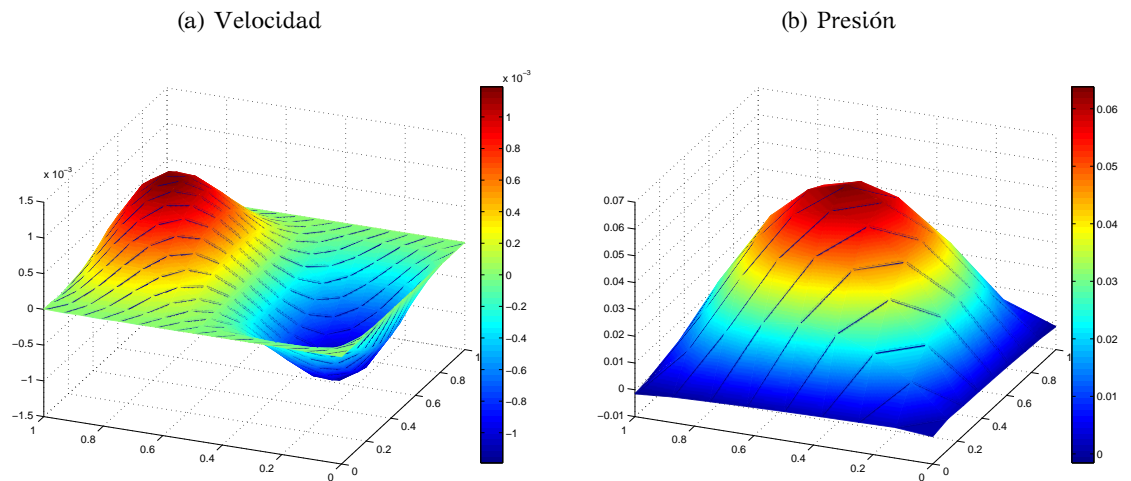
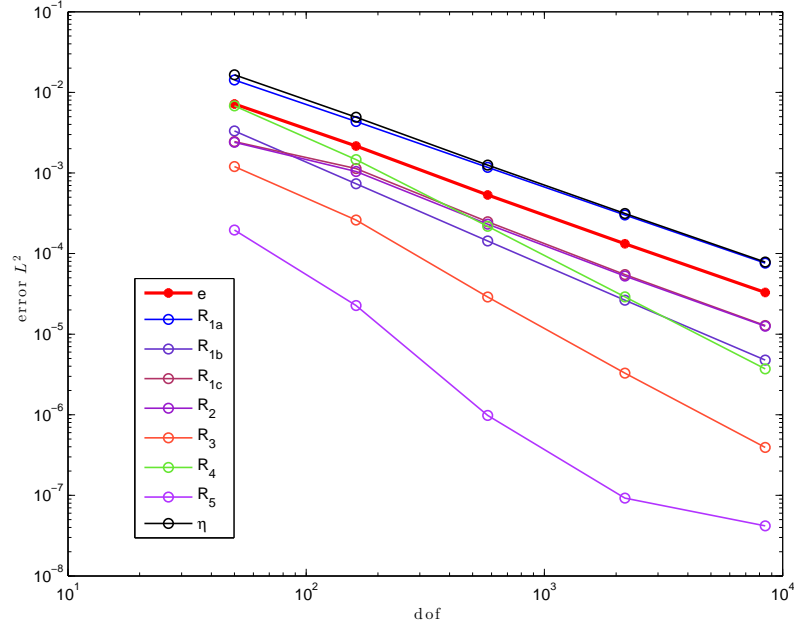


Figura 6.2: Gráficas de la superficie para U^h (Izquierda), P^h (Derecha)

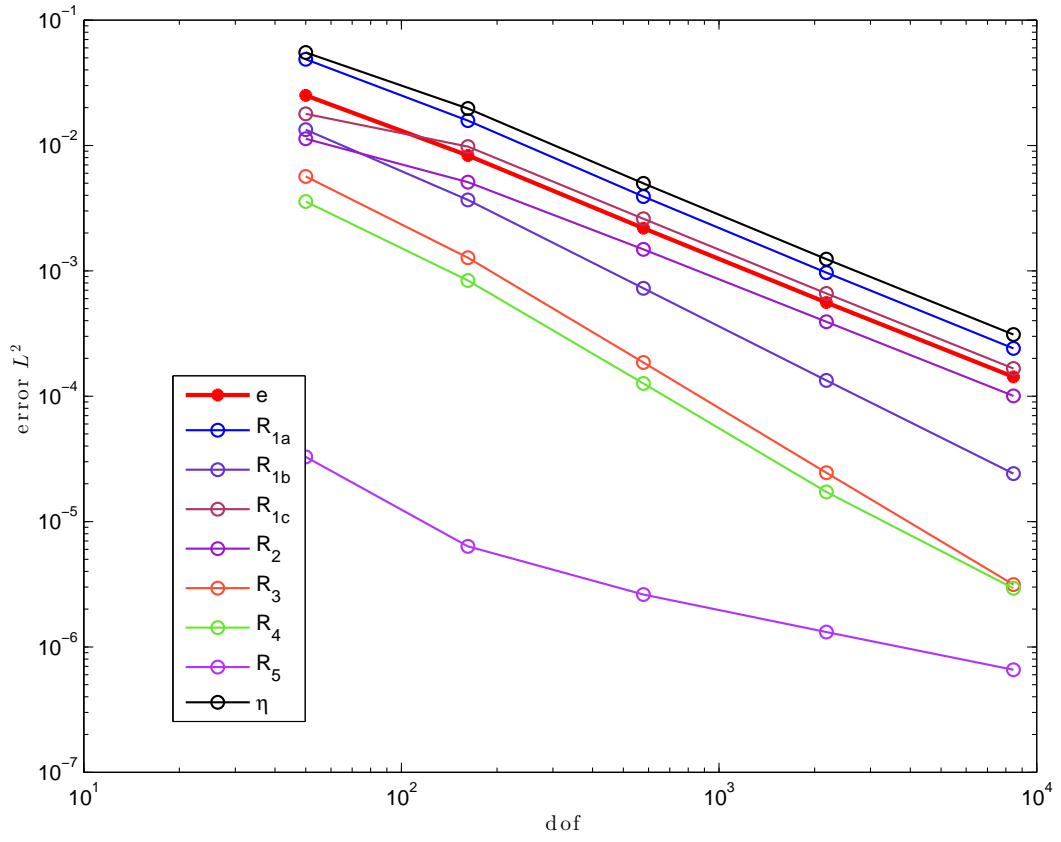
Para el estudio de los estimadores, analizamos su comportamiento para distintos números de intervalos de tiempo, específicamente para $(0, 0.1]$, $(0.9, 0.10]$ y $(2.9, 3]$. En las figuras se gráfica el error $e := \{e_1^2 + e_2^2 + e_3^2\}^{\frac{1}{2}}$, el error estimador $\eta := \sum_{i=1}^5 \mathcal{R}_i$, y los indicadores $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_3, \mathcal{R}_5$, obtenidos en el Teorema 5.1 versus los grados de libertad para los intervalos de tiempo. Para mayor claridad tomamos el primer estimador y

lo descomponemos en cada uno de sus tres miembros $\mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_{1a} + \mathcal{R}_{1b} + \mathcal{R}_{1c}$. Por otra parte, en las siguientes tablas se muestra que el índice de efectividad $q = \frac{\eta}{e}$ mediante truncamiento o redondeo permanece constante. Esto permite establecer que los estimadores definidos mantiene una consistencia independiente al mallado y paso del tiempo.



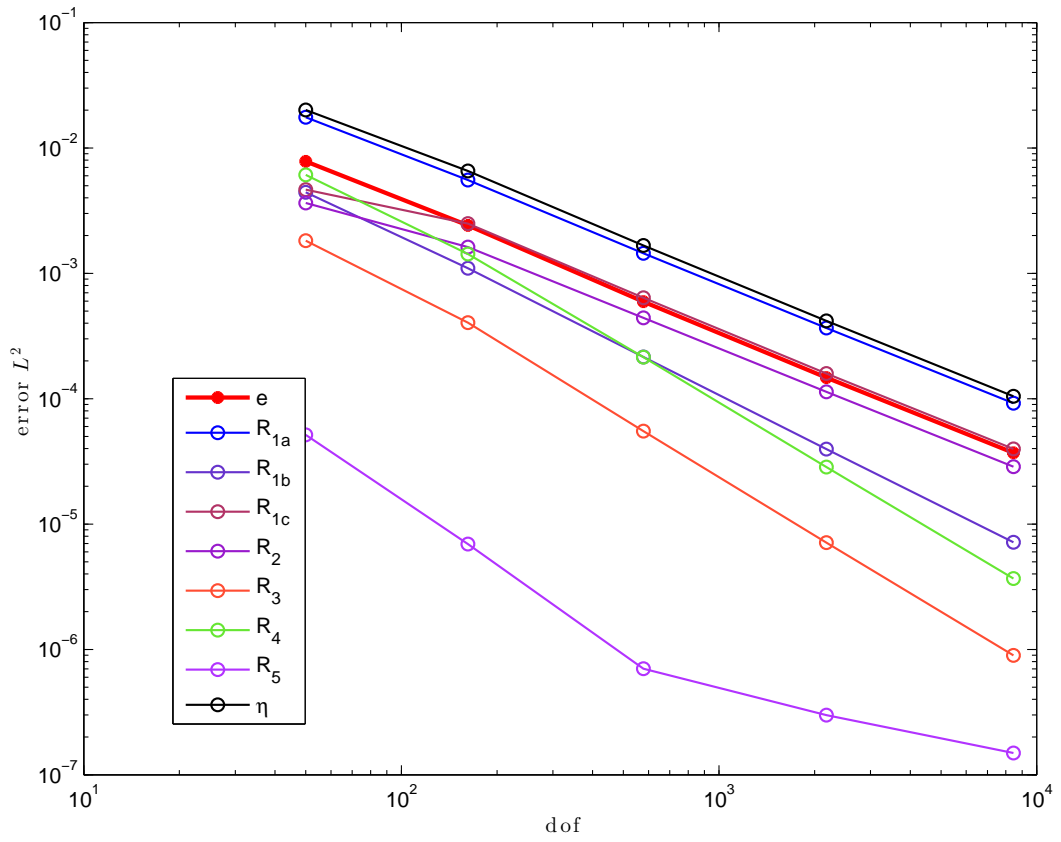
Intervalo de tiempo 1			
DOF	η	e	$q = \frac{\eta}{e}$
50	$1.6550e - 02$	$7.1827e - 03$	2.3899
162	$4.9144e - 03$	$2.1574e - 03$	2.2780
578	$1.2511e - 03$	$5.3379e - 04$	2.3439
2178	$3.1360e - 04$	$1.3202e - 04$	2.3755
8450	$7.8538e - 05$	$3.2863e - 05$	2.3899

Tabla 6.2: Error, valor del indicador residual e índice de efectividad en el intervalo $(0, 0.1]$ para el Ejemplo 6.1



Intervalo de tiempo 10			
DOF	η	e	$q = \frac{\eta}{e}$
50	$5.5136e - 02$	$2.5100e - 02$	2.1764
162	$1.9673e - 02$	$8.3244e - 03$	2.3633
578	$4.9774e - 03$	$2.1836e - 03$	2.3439
2178	$1.2398e - 03$	$5.5767e - 04$	2.3755
8450	$3.1007e - 04$	$1.4247e - 04$	2.3899

Tabla 6.3: Error, valor del indicador residual e índice de efectividad en el intervalo $(0.9, 0.10]$ para el Ejemplo 6.1



Intervalo de tiempo 30			
DOF	η	e	$q = \frac{\eta}{e}$
50	$2.0085e - 02$	$7.8254e - 03$	$2.8265e+00$
162	$6.5492e - 03$	$2.4097e - 03$	$2.7179e+00$
578	$1.6690e - 03$	$5.9402e - 04$	$2.3439e+00$
2178	$4.1774e - 04$	$1.4724e - 04$	$2.3755e+00$
8450	$1.0457e - 04$	$3.6998e - 05$	$2.3899e+00$

Tabla 6.4: Error, valor del indicador residual e indice de efectividad en el intervalo $(2.9, 3]$ para el Ejemplo 6.1

Por ultimo, la gráfica 6.3 muestra el campo de dirección de la velocidad U^h , para el ultimo refinamiento de la malla, en donde se identifica la aproximación en la conservación de la masa

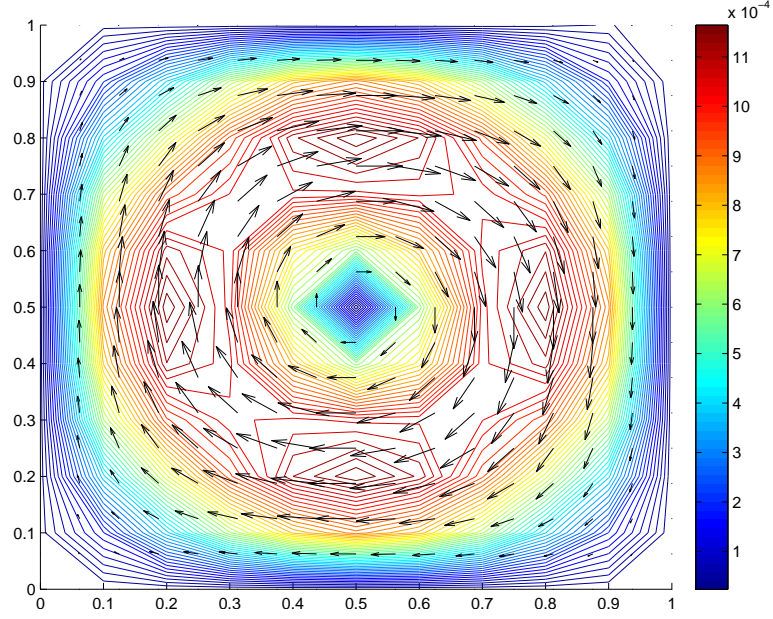


Figura 6.3: Campo direccion de U^h

Ejemplo 6.2. En este ejemplo definimos a Ω como un dominio en forma de L , ver Figura 6.4, y Consideramos el problema de Stokes con soluciones exactas en coordenadas polares,

$$\mathbf{u}(t, r, \theta) = \frac{r^\alpha}{2} \sin t \begin{pmatrix} (\xi^2 - 1)[\cos(2 - \alpha)\theta - \cos\alpha\theta - \xi^{-1}\sin(2 - \alpha)\theta] - \xi^{-1}(1 + 3\xi^2)\sin\alpha\theta \\ (\xi^2 - 1)[\xi^{-1}(\cos(2 - \alpha)\theta - \cos\alpha\theta) + \sin(2 - \alpha)\theta] - (\xi^2 + 3)\sin\alpha\theta \end{pmatrix}$$

$$p(t, r, \theta) = 2r^{-1(1-\alpha)}(\xi^2 - 1)(\xi^2 - 1)[(\cos(1 - \alpha)\theta) - \xi^{-1}\sin(1 - \alpha)\theta]$$

donde $\alpha \approx 0.54$ y $\xi = \sqrt{(1 + \alpha)/(1 - \alpha)} \approx 1.84$, y presenta singularidad en el punto $(0, 0)$

Este tipo de problema modela situaciones en donde se presenta elasticidad de fluidos incomprensibles, sirviendo como referencia, dado que la presencia de esquinas en la frontera del dominio o esquinas re-entrantes produce un comportamiento singular de la solución en las cercanías de dicha esquina, incluso en los casos en que los datos sean suaves. Esta singularidad afecta al orden de convergencia en toda la región [19]

y como observaremos en el siguiente análisis, aproximaciones con mallas uniformes generan errores más grandes o en su defecto errores pequeños con un mayor costos computacional comparado con malla adaptativas. Por lo tanto, el objetivo principal del desarrollo de algoritmo adaptivos es el reconocimiento de las regiones a refinar para obtener mallas graduadas en las que se verifique singularidad.

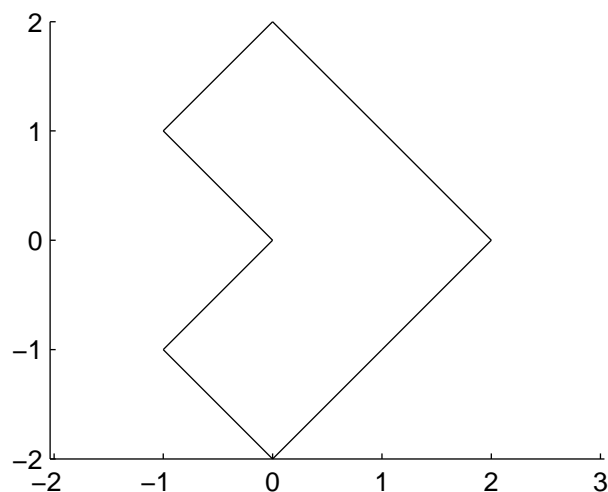
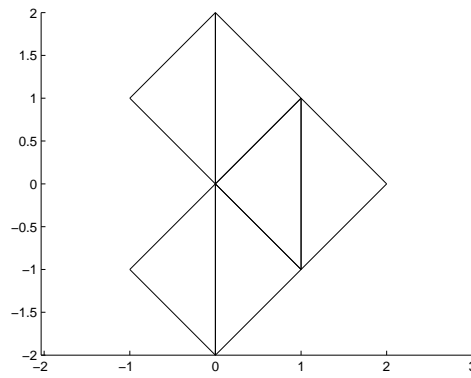


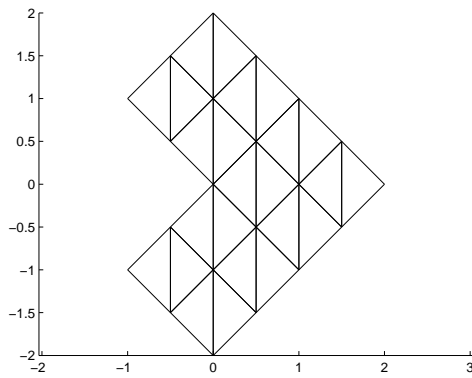
Figura 6.4: Dominio Ω para el ejemplo 6.2

Para nuestro análisis, comenzamos calculando la solución Galerkin para mallas uniforme, ejecutando 5 refinamientos como en el anterior ejemplo, ver Figura 6.5. Posterior a ello, aplicamos el algoritmo de refinamiento. Es decir, se procede por primera refinación de los elementos en los que las contribuciones locales del estimador de error residual son los más grandes son mayores que la tolerancia $\vartheta =$ y luego aplicar la técnica Rojo-Azul-Verde con el fin de eliminar los nodos que cuelga sobre los bordes de los elemento vecinos. Inicialmente el

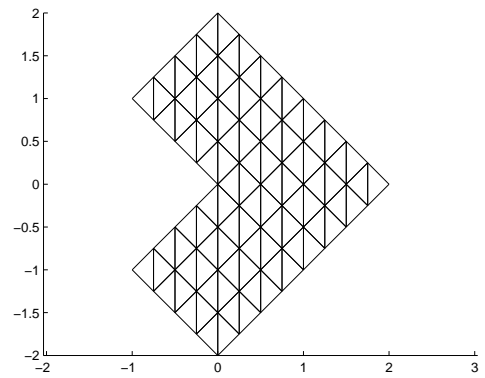
(a) Refinamiento 1



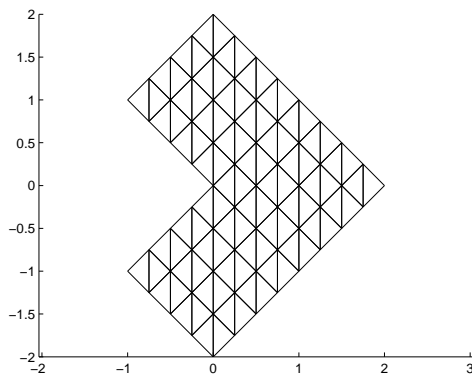
(b) Refinamiento 2



(c) Refinamiento 3



(d) Refinamiento 4



(e) Refinamiento 5

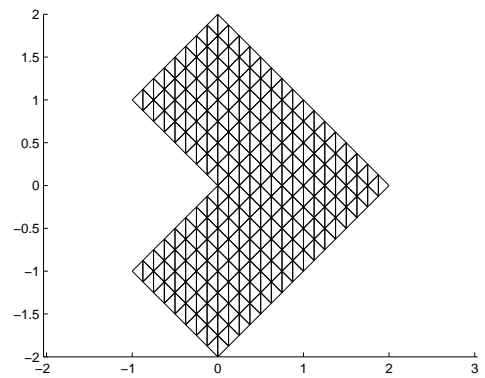


Figura 6.5: Mallas uniformes sobre el dominio con forma de L

La figura 6.6 mostrada a continuación ilustran las soluciones numéricas para el ultimo refinamiento de la malla uniforme.

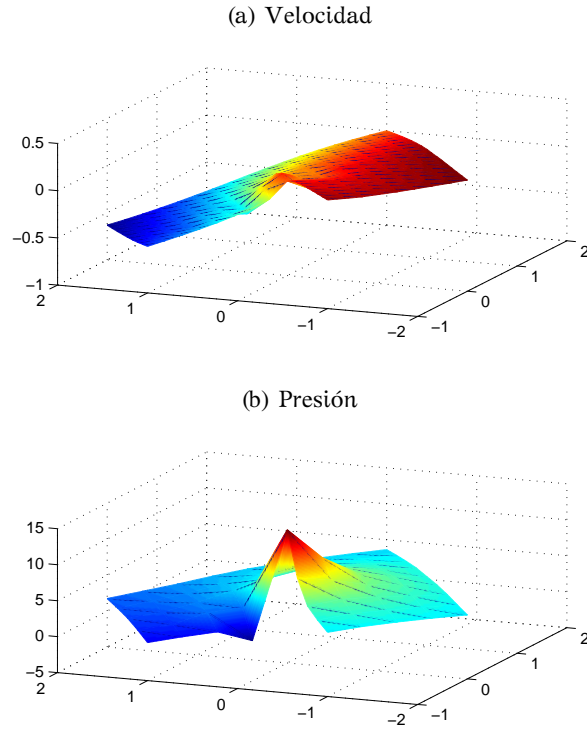
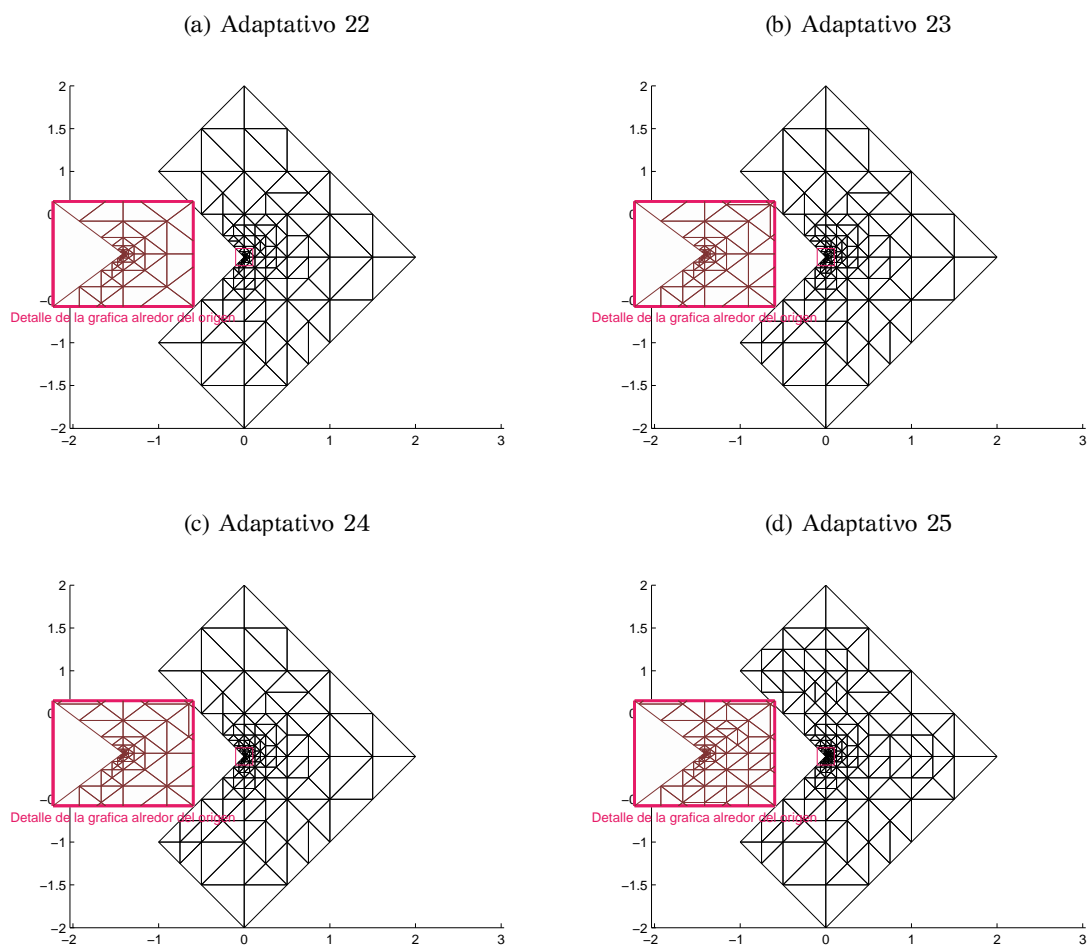


Figura 6.6: Gráficas de la superficie para U^h (Izquierda), P^h (Derecha)

Intervalo de tiempo 1					
Refinamiento	1	2	3	4	5
e_1	2.1015e-01	1.8086e-01	8.6013e-02	3.5342e-02	1.4865e-02
RC_1		2.6576e-01	1.1971e+00	1.3590e+00	1.2867e+00
e_2	9.2198e-01	1.0647e+00	8.1323e-01	5.5259e-01	3.7435e-01
RC_2		-2.3519e-01	4.4800e-01	5.9578e-01	5.8043e-01
e_3	4.4340e+00	3.1667e+00	1.9333e+00	1.2035e+00	7.8263e-01
RC_3		5.9583e-01	7.9478e-01	7.2433e-01	6.3929e-01

Tabla 6.5: Comportamiento del error cuando h tiende a cero en el intervalo $(0, 0.1]$

Dada la singularidad, el procedimiento adaptativo se concentra en refinar elementos alrededor del punto $(0,0)$ y produce una secuencia de mallas refinadas como se muestra en la Figura 6.7. Téngase en cuenta que la implementación del algoritmo 1 se realizó para un paso de tiempo dejando abierta la discusión sobre los resultados que permiten iniciar el remallado dependiente de la tolerancia en el tiempo.



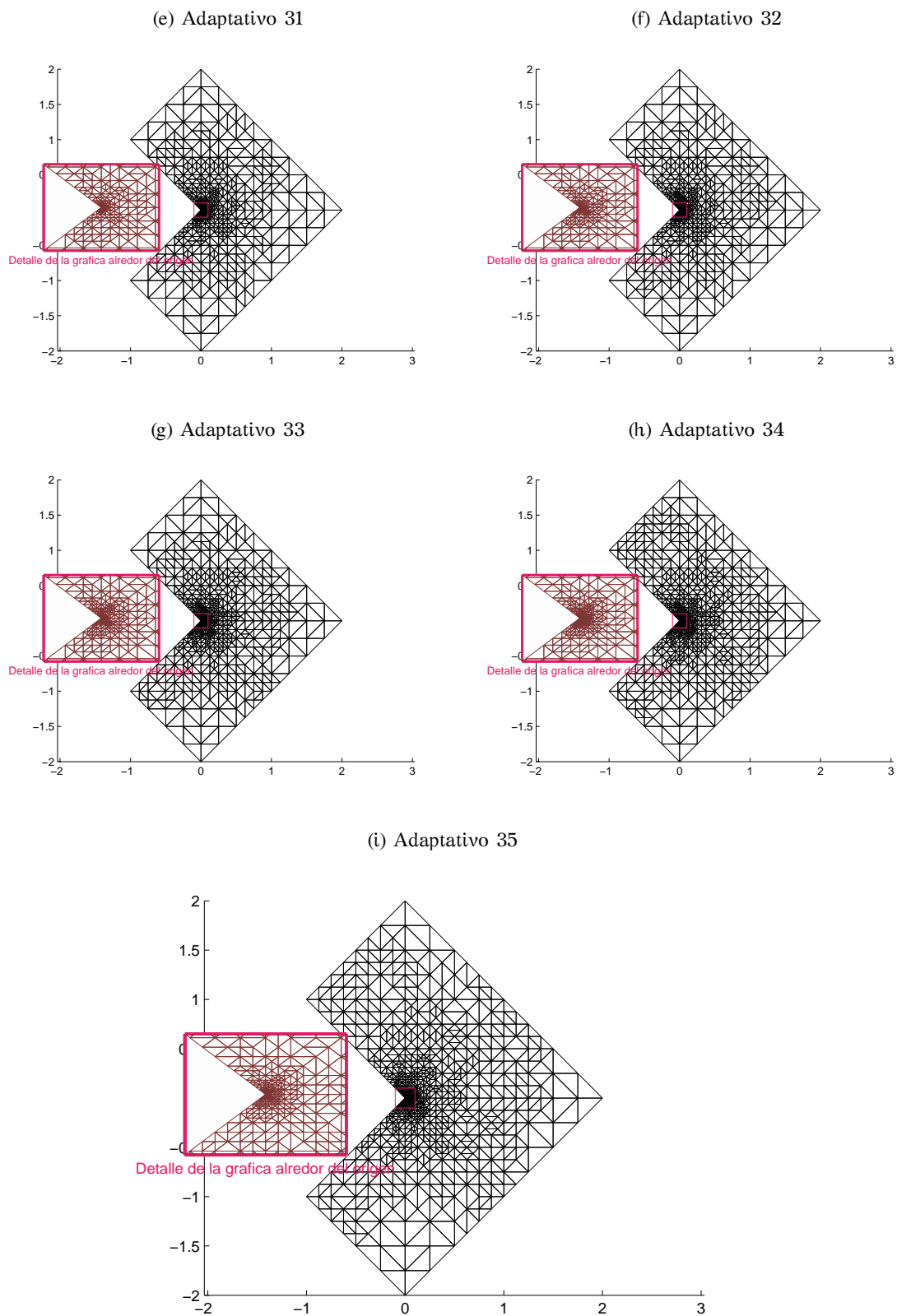


Figura 6.7: Mallas adaptativas sobre el dominio con forma de L

La figura 6.8 mostrada a continuación ilustran las soluciones numéricas para el ultimo refinamiento de la malla uniforme.

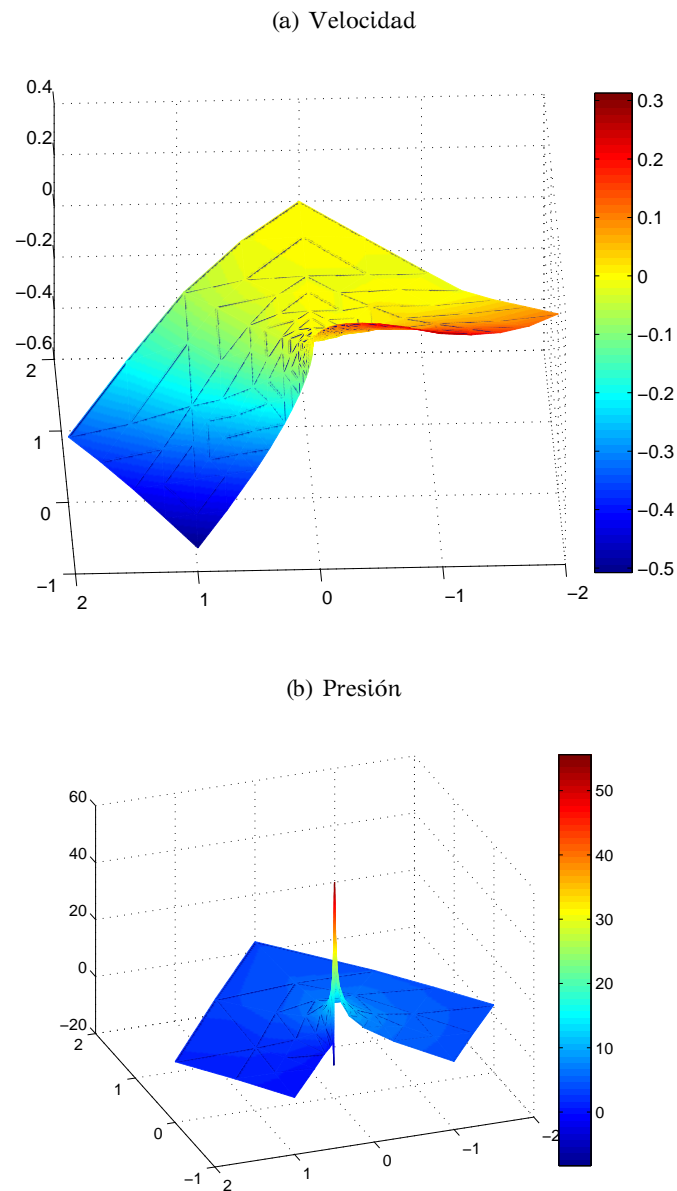


Figura 6.8: Gráficas de la superficie para U^h (Izquierda), P^h (Derecha)

Las siguientes tablas muestran el error y la rata de convergencia para las 35 interacciones adaptativas (IA) que se realizaron. Omitimos las primeras 5 interacciones para generar una mejor presentación.

IA	e_1	e_2	e_3
6	1.6466e-02	3.7292e-01	6.8301e-01
7	1.3531e-02	2.7206e-01	4.9897e-01
8	1.2844e-02	2.0888e-01	3.9096e-01
9	1.2682e-02	1.7148e-01	3.3010e-01
10	1.2640e-02	1.5076e-01	2.9769e-01
11	1.2627e-02	1.3998e-01	2.8127e-01
12	1.2524e-02	1.3952e-01	2.4867e-01
13	1.0001e-02	1.2750e-01	2.3066e-01
14	5.6363e-03	1.0233e-01	1.8703e-01
15	5.0205e-03	9.3315e-02	1.6040e-01
16	4.1508e-03	8.0880e-02	1.3995e-01
17	4.1292e-03	7.9032e-02	1.3463e-01
18	3.6359e-03	7.1730e-02	1.1853e-01
19	3.6344e-03	7.0639e-02	1.1569e-01
20	2.8725e-03	6.1376e-02	9.8062e-02
21	2.2542e-03	5.4817e-02	8.7873e-02
22	1.9700e-03	5.1005e-02	8.1464e-02
23	1.6526e-03	4.4558e-02	7.0803e-02
24	1.4211e-03	4.0175e-02	6.4207e-02
25	1.2904e-03	3.7094e-02	5.9079e-02
26	1.1093e-03	3.3250e-02	5.2262e-02
27	1.0931e-03	3.2160e-02	5.0310e-02
28	9.0753e-04	2.7683e-02	4.4160e-02
29	8.0661e-04	2.5475e-02	4.0176e-02
30	6.7430e-04	2.1804e-02	3.4794e-02
31	6.1583e-04	1.9094e-02	2.9969e-02
32	5.6387e-04	1.7132e-02	2.7255e-02
33	5.2199e-04	1.5568e-02	2.4456e-02
34	4.6144e-04	1.3985e-02	2.2099e-02
35	4.3987e-04	1.2521e-02	1.9814e-02

Tabla 6.6: Error en cada una de las interacciones del método adaptativo para el Ejemplo 6.1

IA	RC ₁	RC ₂	RC ₃
6	5.1620e+00	3.5712e+00	3.8195e+00
7	2.3850e+00	3.8311e+00	3.8143e+00
8	7.3788e-01	3.7403e+00	3.4526e+00
9	2.0417e-01	3.1878e+00	2.7335e+00
10	6.0994e-02	2.3383e+00	1.8765e+00
11	2.0814e-02	1.4958e+00	1.1436e+00
12	1.2057e-01	4.8159e-02	1.8264e+00
13	9.9802e+00	3.9957e+00	3.3342e+00
14	6.6600e+00	2.5541e+00	2.4350e+00
15	1.8057e+00	1.4397e+00	2.3979e+00
16	4.6159e+00	3.4704e+00	3.3089e+00
17	2.1793e-01	9.6551e-01	1.6202e+00
18	2.2078e+00	1.6821e+00	2.2089e+00
19	2.1007e-02	7.7544e-01	1.2294e+00
20	2.8871e+00	1.7251e+00	2.0285e+00
21	4.9873e+00	2.3253e+00	2.2574e+00
22	3.9990e+00	2.1390e+00	2.2472e+00
23	2.6060e+00	2.0046e+00	2.0808e+00
24	4.2252e+00	2.8991e+00	2.7378e+00
25	2.1663e+00	1.7911e+00	1.8686e+00
26	2.7616e+00	1.9982e+00	2.2393e+00
27	1.0268e+00	2.3165e+00	2.6458e+00
28	2.8503e+00	2.2973e+00	1.9979e+00
29	2.6892e+00	1.8958e+00	2.1572e+00
30	2.4828e+00	2.1563e+00	1.9929e+00
31	1.3898e+00	2.0338e+00	2.2874e+00
32	1.9264e+00	2.3693e+00	2.0740e+00
33	1.5235e+00	1.8900e+00	2.1395e+00
34	2.1644e+00	1.8821e+00	1.7792e+00
35	9.1636e-01	2.1172e+00	2.0893e+00

Tabla 6.7: Rata de convergencia en cada una de las interacciones del método adaptativo para el Ejemplo 6.1

Comparando las pendientes, en la Figura 6.9, de las rectas que representan los errores con y sin adaptación de mallado se constata que la pendiente que corresponde a la de mallado uniforme es mas horizontal que la pendiente de la recta que ha resultado de la aplicación del algoritmo. Por tal motivo se asevera que la convergencia con adaptación de mallado es más rápida y los resultados más precisos, dado que el refinamiento uniforme debido a la singularidad en (0,0), no aporta mucho, que el orden de convergencia es pobre.

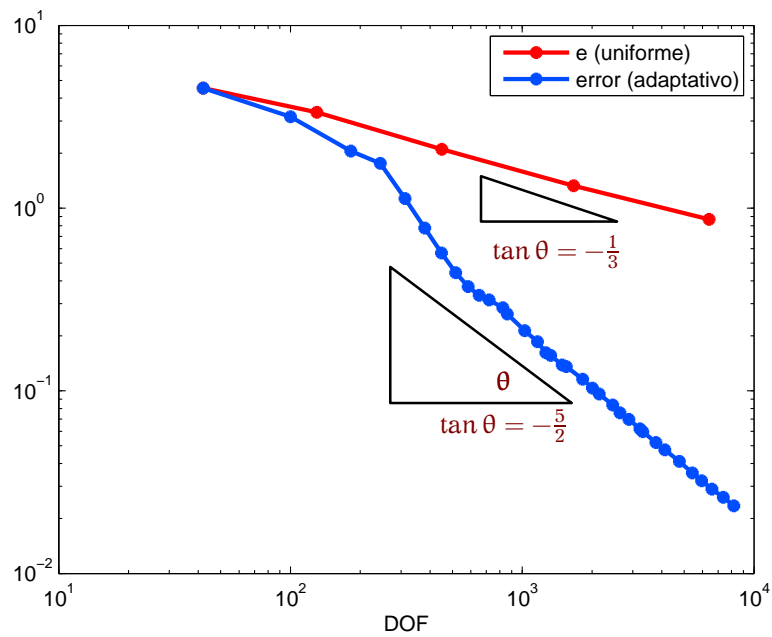


Figura 6.9: Error vs dof usando un refinamiento uniforme (linea rojo) y refinamiento adaptativo (linea azul) para el Ejemplo 6.2

Capítulo 7

Conclusiones

En este capítulo, presentamos las principales conclusiones de esta tesis, así como también los problemas abiertos y los aportes generados

1. Desarrollamos la teoría de un estimador del error a posteriori de tipo residual para sistemas de Stokes que presentan las características mencionadas en (2.1) y posean una aproximación totalmente discreta mediante el método de Galerking discontinuo como en (4.2).
2. Se logro desarrollar un codigo eficiente en MATLAB para resolver problemas no estacionarios por medio de los métodos ya mencionados. Asimismo un algoritmo adaptativo aplicable a problemas que presentan singularidad producto de esquinas re-entrantes.
3. Las experiencias numéricas comprueban los resultados del análisis teórico..

Problemas Abiertos

Como podemos identificar, los elementos finitos conformes se caracterizan por imponer dos requisitos a las funciones de aproximación; Suavidad dentro de los elementos o dominios locales y continuidad a través de las fronteras entre elementos, obteniendo aproximaciones internas que permiten construir los subespacios de dimensión finito del espacio infinito que se desea aproximar. El cumplimiento de los

requisitos junto con algunos procedimientos garantiza la convergencia de las soluciones aproximadas hacia la solución exacta del problema inicial. Sin embargo, para el problema de Stokes, en los años 70, debido a la condición $\text{div} \mathbf{u} = 0$, las soluciones no eran posibles de aproximar por los elementos finitos simples [14]. Por lo tanto, resultaba muy corriente encontrar problemas cuya formulación no seguía estrictamente las líneas del método conforme. Además los elementos no conformes se empezaron a utilizar para facilitar el costo computacional, sin que hubiera una garantía matemática clara de su aceptabilidad. En texto como [9], este fenómeno se denomina crimen variacional. Posteriormente, se determinó que en algunos problemas, las aproximaciones mostraban una mejor orden de convergencia si se cometía el crimen variacional [4].

En los elementos no conformes la variable \mathbf{U}^h no son continuas a través de las fronteras entre los elementos. Como resultado de esta falta de continuidad, alguna de las integrales que aparecen en la forma débil del problema se hace singular en las fronteras entre los elementos. A pesar de ello, se opera como si dicha integral, extendida a todo el dominio de cálculo, pudiera todavía descomponerse en suma de integrales extendidas a los distintos elementos.

En consecuencia, las funciones velocidad del espacio no conforme no son de clase $\mathcal{C}^1(\Omega)$. Por esta razón, ∇ no tienen sentido para funciones no conforme (al menos no son $L^2(\Omega)$). Sin embargo, sobre cada elemento $\mathcal{T} \in \mathcal{T}_h$ están bien definidos, por lo que se establece:

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle_{\mathcal{T}_h} := \sum_{\mathcal{T} \in \mathcal{T}_h} \int_{\mathcal{T}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} \, dx \quad (7.1)$$

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle_{\mathcal{E}_h} := \sum_{\mathcal{T} \in \mathcal{T}_h} \int_{\mathcal{T}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} \, ds \quad (7.2)$$

y establecemos el siguiente problema semidiscreto para no conforme (NC),

Formulación semidiscreta NC

$$\begin{aligned} \langle \partial \mathbf{U}^h, \mathbf{v}^h \rangle_{\mathcal{T}_h} + \sum_{\mathcal{T} \in \mathcal{T}_h} \int_{\mathcal{T}} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v}^h - \langle P^h, \text{div} \mathbf{v}^h \rangle_{\mathcal{T}_h} &= \langle \mathbf{f}, \mathbf{v}^h \rangle_{\mathcal{T}_h} \\ &+ \langle \mathbf{g}, \mathbf{v}^h \rangle_{\mathcal{E}_{h,N}} + \langle [\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}_E} - \mathbf{n}_E p], \mathbf{v}^h \rangle_{\mathcal{E}_{h,\Omega}} \\ \langle q^h, \text{div} \mathbf{U}^h \rangle_{\mathcal{T}_h} &= 0 \end{aligned}$$

Bibliografía

- [1] R. A. ADAMS, *Sobolev spaces*, Academic Press, New York, (1975).
- [2] J. ALBERTY, C. CARSTENSEN, AND S. FUNKEN, *Remarks around 50 lines of Matlab: short finite element implementation*, Numer. Algorithms, 20 (1999), pp. 117–137.
- [3] C. BAHRIAWATI AND C. CARSTENSEN, *Three Matlab implementations of the lowest-order Raviart-Thomas MFEM with a posteriori error control*, CMAM, 5 (2005), pp. 333–361.
- [4] F. BELTRÁN, *Teoría general del Método de los Elementos Finitos*, ETS de Ingenieros Industriales de Madrid, (1999).
- [5] C. BERNARDI, V. GIRAUT, AND F. HECHT, *A posteriori analysis of a penalty method and application to the Stokes problem*, Math. Models Methods Appl. Sci., 13 (2003), pp. 1599–1628.
- [6] C. BERNARDI AND R. VERFÜRTH, *A posteriori error analysis of the fully discretized time-dependent stokes equations*.
- [7] C. BERNARDI AND R. VERFÜRTH, *A posteriori error analysis of the fully discretized time-dependent Stokes equations*, M2AN Math. Model. Numer. Anal., 38 (2004), pp. 437–455.
- [8] D. BOFFI, F. BREZZI, L. F. DEMKOWICZ, R. G. DURÁN, R. S. FALK, AND M. FORTIN, *Mixed finite elements, compatibility conditions, and applications*, vol. 1939 of Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin; Fondazione C.I.M.E., Florence, 2008. Lectures given at the C.I.M.E. Summer School held in Cetraro, June 26–July 1, 2006, Edited by Boffi and Lucia Gastaldi.

- [9] S. C. BRENNER AND L. R. SCOTT, *The mathematical theory of finite element methods*, vol. 15 of Texts in Applied Mathematics, Springer, New York, third ed., 2008.
- [10] C. CARSTENSEN, S. BARTELS, AND R. KLOSE, *An experimental survey of a posteriori Courant finite element error control for the Poisson equation*, Adv. Comput. Math., 15 (2001), pp. 79–106.
- [11] C. CARSTENSEN AND C. MERDON, *Computational survey on a posteriori error estimators for nonconforming finite element methods for the Stokes problem*, CMAM, 14 (2014).
- [12] P. CLÉMENT, *Approximation by finite element functions using local regularization*, Rev. Française Automat. Informat. Recherche Opérationnelle Sér. Rouge, 9 (1975), pp. 77–84.
- [13] M. CROUZEIX AND P.-A. RAVIART, *Conforming and nonconforming finite element methods for solving the stationary Stokes equations. I*, Rev. Française Automat. Informat. Recherche Opérationnelle Sér. Rouge, 7 (1973), pp. 33–75.
- [14] H. C. ELMAN, D. J. SILVESTER, AND A. J. WATHEN, *Finite elements and fast iterative solvers: with applications in incompressible fluid dynamics*, Numerical Mathematics and Scientific Computation, Oxford University Press, New York, 2005.
- [15] K. ERIKSSON AND C. JOHNSON, *Adaptive finite element methods for parabolic problems. i. a linear model problem*, SIAM J. Numer. Anal., 28 (1991), pp. 43–77.
- [16] L. C. EVANS, *Partial differential equations*, vol. 19 of Graduate Studies in Mathematics, American Mathematical Society, Providence, RI, second ed., 2010.
- [17] V. GIRAULT AND P.-A. RAVIART, *Finite element approximation of the Navier-Stokes equations*, vol. 749 of Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1979.
- [18] R. A. PRATO TORRES, *FE/BE coupling for the time-dependent interface problems in electromagnetics*, dissertation, Gottfried Wilhelm Leibniz Universität Hannover, 2008.
- [19] P. C. Y. V. M. SALIBA R., *Adaptatividad para problemas de elasticidad lineal en 3d*, Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería., 13 (1997), pp. 103–121.

- [20] C. TAYLOR AND P. HOOD, *A numerical solution of the Navier-Stokes equations using the finite element technique*, Internat. J. Comput. & Fluids, 1 (1973), pp. 73–100.
- [21] R. TEMAM, *Navier-Stokes equations. Theory and numerical analysis*, North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York-Oxford, 1977. Studies in Mathematics and its Applications, Vol. 2.
- [22] V. THOMÉE, *Galerkin finite element methods for parabolic problems*, vol. 25 of Springer Series in Computational Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, second ed., 2006.
- [23] J. L. VARGAS, *Implementación del elemento finito mixto conforme p_2 - p_1 de Taylor-Hood y p_2^+ - p_1 de Crouzeix - Raviart para un problema de stokes en un mallado binimensional anisotrópico*, Universidad Centroccidental "Lisandro Alvarado" Decanato de Ciencia y Tecnología, (2011).
- [24] R. VERFÜRTH, *A review of a posteriori error estimation techniques for elasticity problems*, 1997.
- [25] R. VERFÜRTH, *A posteriori error analysis of space-time finite element discretizations of the time-dependent Stokes equations*, Calcolo, 47 (2010), pp. 149–167.